

19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 6. Kaç p asal sayısı için, $|p^4 - 86|$ sayısı da asaldır?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

Çözüm. Eğer $p = 5$ ise $|p^4 - 86| = 539 = 7^2 \times 11$ asal olmayacaktır. Varsayalım $p \neq 5$ olsun, dolayısıyla $p^4 \equiv 1 \equiv 86 \pmod{5}$ olacaktır. Buna göre, $5 | p^4 - 1$ veya $5 | p^4 - 86$ olacaktır. $p^4 - 86$ asal bir sayı olduğuna göre $p^4 - 86 = 5$ veya $86 - p^4 = 5$ olacaktır. Buradan p değeri sadece 3 olarak bulunur. Doğru cevap "B" seçeneğindedir.

Alternatif Çözüm.(A. Ülker'in Çözümü).

$p = 2$ için sağlanmaz fakat $p = 3$ için $|3^4 - 86| = 5$ olduğundan asal sayıdır.

Şimdi geri kalan asalları $p = 3n \pm 1$ ($n \in \mathbb{N}$) olarak kontrol edelim. Buna göre;

$$|p^4 - 86| = |(3n+1)^4 - 86| \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{ve} \quad |p^4 - 86| = |(3n-1)^4 - 86| \equiv 0 \pmod{5} \text{ olmaktadır.}$$

(Küçük Fermat Teoreminden¹ $(3n+1)^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ve $(3n-1)^4 \equiv 1 \pmod{5}$ dir.) Buna göre sadece $p = 3$ için $|p^4 - 86| = 5$ bir asal sayıdır diğerleri için asal sayı değildir.



¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_little_theorem