19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 4. $\{1,2,3,\ldots,20\}$ kümesinin 8 elemanlı altkümelerinin kaçı ardışık sayılar içermez?

A. $\binom{13}{8}$ **B.** $\binom{13}{9}$ **C.** $\binom{14}{8}$ **D.** $\binom{14}{9}$ **E.** $\binom{20}{15}$

Çözüm. Varsayalım seçtiğimiz elemanlar $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_8 \le 20$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 - 1 \\ c_2 &= a_2 - a_1 \\ &\vdots \\ c_i &= a_i - a_{i-1} \end{aligned}$$

olarak alırsak $\sum_{i=1}^{9} c_i = 19$ yani $c_1 + c_2 + \cdots + c_9 = 19$ olacaktır. Burada, $0 \le c_1, c_9$ ve $2 \le c_2, c_3, c_4, \cdots c_8$ olacaktır. Öyleyse, soruda istenilen değer $f(x) = \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^2 \left(x^2 + x^3 + \cdots\right)^7$ açılımında x^{19} teriminin katsayısı olacaktır. $f(x) = x^{14}\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^9$ ise ikinci çarpan içerisindeki x^5 değişkeninin katsayısına bakmamız yeterli olacaktır.

Öyleyse, $f(x) = x^{14} \cdot (1-x)^{-9}$ olacağından $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^9} = \sum_{i=1}^{9} \binom{n+i-1}{i} (-x)^i$ eşitliğinden dolayı

$$(-x)^5 \cdot \binom{9+5-1}{5} = x^5 \cdot \binom{13}{5} = x^5 \cdot \binom{13}{8}$$

olacaktır. Öyleyse istenilen cevap, $\binom{13}{8}$ olacaktır.

Doğru cevap “A” seçeneğinde verilmiştir.

$\boxed{\sum}$