19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 34. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, 2^n sayısının on tabanına göre yazılımında sağdan en çok kaç basamakta aynı rakam yer alabilir?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. Hiçbiri

Çözüm. $2^n \equiv 2,4,6,8 \pmod{10}$ olduğuna göre tekrar eden basamaklar $222\cdots222$, $444\cdots444$, $666\cdots666$ veya $888\cdots888$ formunda olacaklardır. Tekrar eden basamakların sayısını $k \in \mathbb{Z}^+$ olarak alalım ve sorumuzu $k \geq 5$ için çözmeye çalışalım.

Eğer $2^n = \ldots\ldots\underbrace{222\ldots22}_{k \text{ tane}}$ ise $4 \mid 2^n$ olacağından k sayısı en fazla 1 olacaktır. Çünkü son iki basamağı 2 olan bir sayı 4 ile kalansız bölünemez.

Eğer $2^n = \ldots\ldots\underbrace{666\ldots66}_{k \text{ tane}}$ ise $4 \mid 2^n$ olacağından k yine en fazla 1 olacaktır. Çünkü son iki basamağı 6 olan bir sayı 4 ile kalansız bölünemez.

Eğer $2^n = \ldots\ldots\underbrace{444\ldots44}_{k \text{ tane}}$ ise $k \geq 5$ için sayımız kesinlikle 8 ile bölünebiliyor olmalıdır. Ancak, son 3 basamağı 4 olan bir sayı 8 ile bölünemez. Benzer biçimde son iki basamağı 4 olan bir sayı da kesinlikle 8 ile bölünemez. Dolayısıyla, k değeri en fazla 1 olacaktır.

Eğer $2^n = \ldots\ldots\underbrace{888\ldots88}_{k \text{ tane}}$ ise $k \geq 5$ için $8 \cdot \left(\underbrace{111\ldots1}_{k \text{ tane}} \right) \equiv 0 \left(\bmod 2^k \right)$ denkliği sağlanamaz. $k = 4$ için $2^n = \ldots\ldots8888$ sayısının 16 ile bölünmesi gerekir, ancak bu durum da imkansızdır. $2^n = \ldots\ldots888$ için $2 \mid 2^n, 4 \mid 2^n$ ve $8 \mid 2^n$ olacaktır. Öyleyse, sağdan en fazla 3 basamak aynıdır ve bu basamaklar 8 dir.

Buna göre, doğru cevap "B" seçeneğinde verilmiştir.

$\boxed{\Sigma}$