19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 27. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 1, a_3 = 4$ ve her $n \geq 2$ için, $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 1$ koşulunu sağlıyorsa, a_{2011} nedir?

A. 2^{2010}

B. 2021056

C. 1010528

D. 3016

E. 2011

Çözüm. Eğer soruda verilen, $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 1$ ifadesini düzenlersek $a_n = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{1}{2}$ ifadesini elde ederiz. Burada $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
& a_2 - \frac{a_1}{2} = \frac{a_3}{2} - \frac{1}{2} \\
& a_3 - \frac{a_2}{2} = \frac{a_4}{2} - \frac{1}{2} \\
& \vdots \\
& a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak $-\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}(n-1)$ eşitliğinden $a_n - a_{n+1} = -a_2 - n + 2$ elde edilir. Buradan $a_2 = 2$ olduğunu bulmak zor değildir. Buna göre yeni eşitliğimiz $a_{n+1} - a_n = n$ olacaktır. Yani,

$$
\begin{aligned}
& a_3 - a_2 = 2 \\
& a_4 - a_3 = 3 \\
& \vdots \\
& a_{2011} - a_{2010} = 2010
\end{aligned}
$$

için bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$a_{2011} = 1005 \cdot 2011 + 1 = 2021056$$

ifadesi elde edilir.

Doğru cevap "B" seçeneğinde verilmiştir.

$\boxed{\Sigma}$