19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 26. $0 \le a < 2^{2008}$ ve $0 \le b < 8$ tam sayıları $7\left(a + 2^{2008}b\right) \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 2^{2011}\right)$ denkliğini sağlıyorsa, b nedir?

A. 3

B. 5

C. 6

D. 7

E. Hiçbiri

Çözüm. $7\left(a + 2^{2008} \cdot b\right) = 2^{2011} \cdot k + 1$ eşitliğinin sağlanması gerekmektedir. Buna göre, bu eşitliğin her iki tarafına $(mod 2^{2008})$ altında bakarsak $7a \equiv 1(mod\ 2^{2008})$ olduğu görülecektir. Buna göre, $7a = 2^{2008}u + 1$, $u \in Z$ olacaktır. Burada a değişkenini tek başına bırakırsak, $a = \frac{2^{2008}u+1}{7} \in Z$ ve $a < 2^{2008}$ ise $u = 3$ alınabilir.

Buna göre, $u = 3$ için, $7a = 2^{2008}3 + 1$ ise

$$\begin{aligned} 7a + 7 \cdot 2^{2008} \cdot b &\equiv 2^{2008} \cdot 3 + 1 + 7 \cdot 2^{2008} \cdot b \\ &\equiv 2^{2008}\left(3 + 7b\right) + 1 \end{aligned}$$

ise $2^{2008} \cdot \left(3 + 7b\right) \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, 2^{2011}\right)$ ise $b = 3$ olacaktır. Gerçektende $b = 3$ için

$$\begin{aligned} &2^{2008} \cdot 3 + 1 + 7 \cdot 2^{2008} \cdot 3 \equiv 2^{2008}\left(3 + 21\right) + 1 \\ &\equiv 2^{2008} \cdot 2^3 \cdot 3 + 1 \\ &\equiv 2^{2011} \cdot 3 + 1 \\ &\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 2^{2011}\right) \end{aligned}$$

olacaktır.

Doğru cevap “A” seçeneğinde verilmiştir.

$\boxed{\Sigma}$