

19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 2. $(x+1)^{65}$ polinomunun kaç katsayısı 65 e bölünemez?

A. 20

B. 18

C. 16

D. 3

E. Hiçbiri

Çözüm. Eğer $(x+1)^{65}$ polinomunu açmaya çalışsaydık karşımıza

$$x^{65} \binom{65}{0} + x^{64} \binom{65}{1} + x^{63} \binom{65}{2} + \dots + x^3 \binom{65}{62} + x^2 \binom{65}{63} + x \binom{65}{64} + 1 \binom{65}{65}$$

şeklinde devasa bir polinom çıkacaktı. Aslında soruda istenilen değer $\frac{65!}{(65-n)!n!} \equiv 0 \pmod{65}$

denkliğini sağlamayan n değişkenlerinin sayısıdır. Eğer $65!$ sayısını incelersek, $65! = 13^5 \cdot 5^{15} \cdot A$, $A \in \mathbb{Z}^+$ formunda bir sayı olduğunu görebiliriz. Öyleyse, denkliğin sağlanmaması için paydada bulunan $(65-n)!n!$ formundaki sayının asal çarpanlarına ayrıldığında 13 ve 5 in kuvvetlerinin sırasıyla 5 ve 15 sayılarından büyük veya eşit olmaları gerektiğini görmek zor değildir.

Buna göre, çarpanlarında bu durumu sağlayan binom katsayıları,

$$\binom{65}{0} = \binom{65}{65}, \binom{65}{5} = \binom{65}{60}, \binom{65}{10} = \binom{65}{55}, \binom{65}{30} = \binom{65}{35}$$

$$\binom{65}{13} = \binom{65}{52}, \binom{65}{26} = \binom{65}{39}, \binom{65}{15} = \binom{65}{50}, \binom{65}{25} = \binom{65}{40}$$

olacaktır. Buna göre, istenilen toplam 16 katsayı 65 ile kalansız bölünemez.

Doğru cevap "C" seçeneği olacaktır.

