

19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 15. Aşağıdaki (a,b) ikililerinden hangisi için, $x + 2y < a$ ve $xy > b$ eşitsizliklerini sağlayan hiçbir x, y pozitif gerçel sayı ikilisi yoktur?

A. (15/4, 4/7)

B. (18/11, 1/3)

C. (5/7, 1/16)

D. (6/7, 1/11)

E. Hiçbiri

Çözüm. $a > x + 2y > \frac{b}{y} + 2y$ eşitsizliğini soruda verilen eşitsizlikleri kullanarak yazabiliriz. Buradan,

$$\Rightarrow a > \frac{b}{y} + 2y \Rightarrow ay > b + 2y^2$$

$$\Rightarrow 0 > 2y^2 - ay + b$$

$\Delta = a^2 - 8b$ olacağından $y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8b}}{4}$ olacaktır. $y_{1,2} \in \mathbb{R}^+$ ise $a^2 \geq 8b$ olması gerekecektir.

Eğer seçenekleri yerine koyarsak, tüm seçeneklerin $a^2 \geq 8b$ eşitsizliğini sağladığını görmek zor değildir. Buna göre istenilen cevap "E" seçeneğinde verilmiştir.

Σ