

19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 13. Dar açılı bir ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, D, E, F dir. $|DF|=3$, $|FE|=4$, $|DE|=5$ ise, DE ye teğet olan C merkezli çemberin yarıçapı nedir?

A. 7

B. 6

C. 5

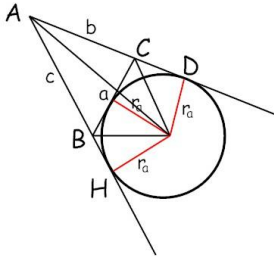
D. 4

E. 3

Çözüm. Önce soruda kullanacağımız Lemma'yı verip kanıtlayalım.

Lemma. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c ve yarı çevresi u ise $A_{ABC} = r_a \cdot u - a = r_b \cdot u - b = r_c \cdot u - c$ dir.

Kanıt. Eğer Şekil 1'i kullanırsak



$$A_{ABC} = A_{ABO} + A_{ACO} - A_{BOC}$$

$$= \frac{r_a \cdot c}{2} + \frac{r_a \cdot b}{2} - \frac{r_a \cdot a}{2} = \frac{r_a}{2} (c + b - a) = \frac{r_a}{2} (2u - 2a) = r_a (u - a)$$

Olacağından ispat tamamlanır.

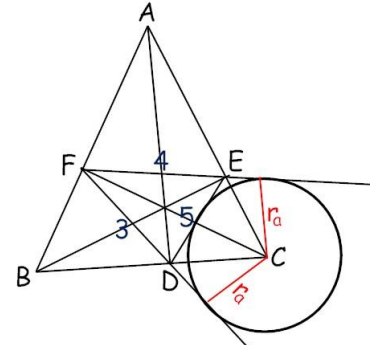
Şekil 1

Şimdi bu sonucu kullanarak sorumuzu çözelim. ABC üçgeninde $5 + 4 + 3 = 2u$ ve $u = 6$ olacaktır. Buna göre, $A_{ABC} = r_a \cdot u - a$ eşitliğini kullanırsak,

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = r_a \cdot 6 - 5$$

eşitliğinden $r_a = 6$ olarak bulunacaktır.

Buna göre, doğru cevap "B" seçeneğinde verilmiştir.



Şekil 2

