XIV. Ulusal Matematik Olimpiyatı
2010
Soruları ve Çözümleri

©www.sbelian.wordpress.com
sbelianwordpress@gmail.com

Tübitak BAYG tarafından her yıl Lise öğrencilerinin katılımı ile yapılan sınavlardan XV. Ulusal Matematik Olimpiyatları-2010 sınavının soruları ve çözümleri ilerleyen sayfalarda verilmiştir. Sınavda toplam 36 soru vardır. Çözümlerde tüm basamaklar ayrıntılı olarak yazılmıştır. Çözümlerin yapılmasında ve **LaTeX 2ε** ile yazılmasında emeği geçenlere teşekkür ederiz. Soruların ve çözümlerin **tamamının** yayın hakkı sadece TÜBİTAK'a ve yayın hakkı almış yayınevlerine aittir. Sizde tüm çözümlere ulaşmak isterseniz web[1] üzerinden, tüm yılların ayrıntılı çözümlerinin verildiği kitaplara ulaşabilirsiniz.

Kolay gelsin.

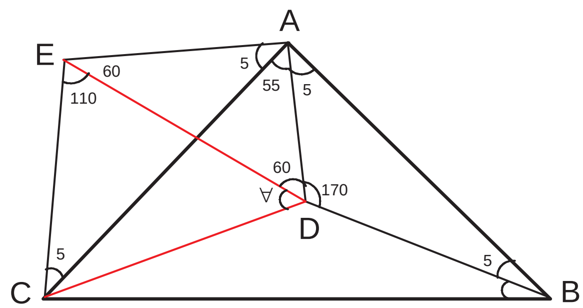
Sbelian $\boxed{\Sigma}$

[1] Altın Nokta Yayınları, www.nokta2000.com

Soru 1. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 5°$ ve dış bölgesindeki bir E noktası için de, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ACE}) = 5°$ ise $m(\widehat{EDC})$ kaçtır?

(A) 45° (B) 40° (C) 35° (D) 30° (E) 25°

Çözüm 1. Eğer soruda verilen üçgeni çizersek aşağıdaki şekili elde ederiz. Buna göre, aslında ADB üçgeni ile AEC üçgenlerinin iki eş üçgen olduğunu görmek zor değildir. Hem iki açıları hem de iki kenarlarının eş olduğu görülmektedir.



Dolayısı ile AE kenarının uzunluğu AD kenarına eşit olacağından AED üçgeni eşkenar üçgen olacaktır. Buradan CED açısının 11° olduğunu görmek zor değildir. Benzer biçimde CE kenarıda ED kenarına eşit olacağından,

$$180_{\circ} = 110° + m(ECD) + \alpha$$

ise $m(ECD) = m(EDC) = \alpha = 35°$ bulunur. ”C” seçeneği doğru cevaptır.

Soru 2. $y^2 - x^2 = 2y + 7x + 4$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) Sonsuz çoklukta

Çözüm 2. Eğer soruda verilen eşitsizliği düzenlersek,

$$(2x + 2y - 5)(2x - 2y + 9) = 29$$

eşitliğini elde ederiz. 29 sayısı asal bir sayı olduğuna göre, çözüme gitmek daha kolay olacaktır. Buna göre istenen çözüm ikilileri

$$(-11, -6), (-11, 8), (4, -6), (4, 8)$$

olacaktır. Ancak bu ikililerden sadece $(4, 8)$ soruda istenilen şartları sağlamaktadır. Buna göre sadece bir tane ikili vardır. İstenilen cevap "C" seçeneğinde verilmiştir.

Soru 3.

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 2xy \\ x^3 + x^2y &= y^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) Hiçbiri

Çözüm 3. Soruda verilen birinci eşitliği düzenlersek $y = \dfrac{x^2}{2x-2}$ bulunacaktır. Bu eşitliği soruda verilen ikinci eşitlikte yerine koyarsak,

$$x^2 + x^2\left(\frac{x^2}{2x-2}\right) = \left(\frac{x^2}{2x-2}\right)^2$$

denklemini elde ederiz. Eğer bu eşitlikte düzenlenirse,

$$x^3\left(1 + \frac{x}{2x-2}\right) = \frac{x^3}{(2x-2)^2}$$

eşitliği elde edilir. Burada $(x, y) = (0, 0)$ ikilisinin bir çözüm olduğu açıktır. Eğer son yazılan ifade de düzenlenirse,

$$(2x-2)[(3x-2)(2x-1)-1] = 0$$

olacaktır. Burada da $x = 1$ için eşitlik sağlanır ancak bu değer soruda verilen denklemi sağlamaz. Bunun için $x = 1$ için çözüm yoktur. Buna göre,

$$(3x-2)(2x-2) - 1 = 0$$

eşitliğine bakalım. Bu eşitliği sağlayan x değerlerini 2. dereceden denklemi çözerek,

$$x = \frac{1}{6}\left(5 - \sqrt{7}\right) \text{ ve } x = \frac{1}{6}\left(5 + \sqrt{7}\right)$$

olarak buluruz. Demek ki, soruda verilen denklem sistemini sağlayan 3 tane x değeri için toplam (x, y) ikililerinin sayısı 3 tanedir.

Soru 4. Rakamlarının faktöriyelleri toplamı kendisine eşit olan 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) Hiçbiri

Çözüm 4. $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ olduğuna göre elde edeceğimiz sayılardan hiçbirinin basamaklarında 7 den büyük rakam bulunmayacaktır. Buna göre, sayımızın basamaklarında sadece $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ rakamları bulunacaktır. Bunların arasında ise ilk etapta soruda verilen şartı sağlayan $1! = 1$ ve $2! = 2$ olduklarını görmek zor değildir. Peki bu ikilinin dışında sayılar var mıdır? Eğer sayımızda 6 rakamı bulunsaydı sayının 720 den büyük olması gerekirdi ve bu sayının diğer basamakları $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sayılarından biri olamazdı. Eğer sayımızda 5 rakamı bulunsaydı sayının 120 den büyük olması gerekirdi. Ancak 5 sayısı, sayının en solunda bulunmazdı. Öyleysebu sayıyı en sağa alıp toplamımızı küçültelim. 5 sayısının yanına ise 1 ve 4 rakamlarını yazalım ki toplam hala 1 ile başlasın. Buna göre

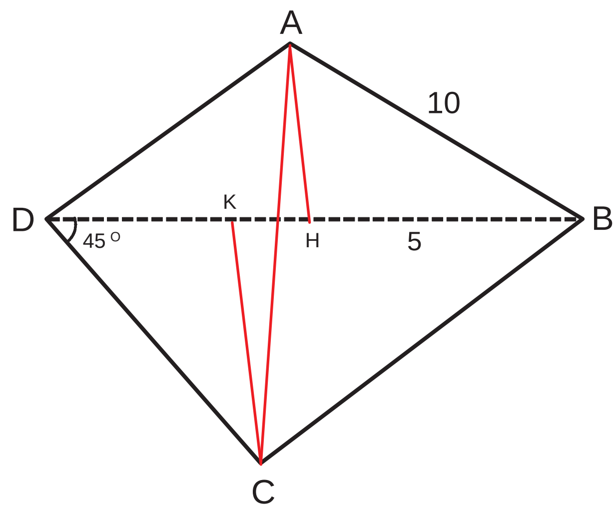
$$145 = 1! + 4! + 5!$$

olacağından istenilen sayılarımız 145, 1 ve 2 olacaktır. Yani toplam 3 sayımız vardır. İstenilen cevap "C" seçeneğindedir.

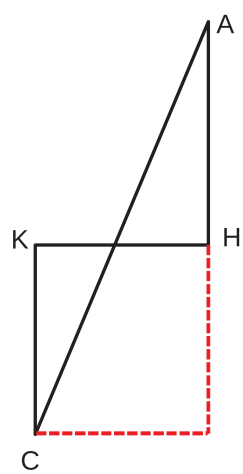
Soru 5. Dışbükey bir ABCD dörtgeninde, $|AB| = 10$, $|CD| = 3\sqrt{6}$, $m(\widehat{ABD}) = 60°$, $m(\widehat{BDC}) = 45°$, $|BD| = 13 + 3\sqrt{13}$ ise, $|AC|$ kaçtır?

(A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 14 (E) 12

Çözüm 5. Önce soruda verilen dörtgeni çizelim.



Buna göre, $|AH| = 5\sqrt{3}$, $|HB| = 5$ olduğunu görmek zor değildir. Benzer biçimde $|DK| = 3\sqrt{3}$ ve $|CK| = 3\sqrt{3}$ olduğuda kolaylıkla bulunacaktır. Öyleyse $|KH|$ uzunluğu 8 birim olacaktır. İstenen $|AC|$ uzunluğu için yeni bir şekil daha çizmemiz çözümü görmek adına yardımcı olacaktır. Buna göre,



$|AC|^2 = |KH|^2 + |AA'|^2$ eşitliğinden $|AC|^2 = 8^2 + (8\sqrt{3})^2 = 256$ eşitliğinden $|AC| = 16$ olarak bulunur. Buna göre doğru cevap "C" seçeneğindedir.

Soru 6. $2011y^2 = 2010x + 3$ eşitsizliğini sağlayan kaç (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) Sonsuz çoklukta

Çözüm 6. Soruda verilen eşitliğin her iki tarafına (mod5) altında bakalım. Buna göre,

$$2010x + 3 \equiv 2011y^2 \,(\mathrm{mod}5)$$

olacağından

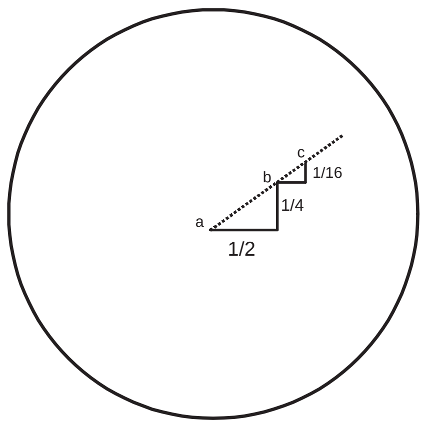
$$y^2 \equiv 3(\mathrm{mod}5)$$

olacaktır. Ancak kalan sınıfları incelendiğinde y^2 sayısının 5 ile bölümünden kalanlar sadece $0, 1, 4$ olacaktır. Buna göre hiçbir zaman y^2 sayısı (mod5) altında 0 a eşit olamaz. Yani soruda verilen eşitliği sağlayan (x, y) ikilileri yoktur. Doğru cevap "D" seçeneği olacaktır.

Soru 7. r metre yarıçaplı daire biçiminde bir adacığın merkesinde duran bir kurbağa $1/2$ metrelik atlayışla başlayıp, her seferinde $90°$ sağa veya sola dönerek bir öncekinin yarısı uzunluğunda bir atlayış yapıyor. Sonlu sayıda atlayışta kurbağanın suya varamamasını sağlayan en küçük r değeri nedir?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{19}}{6}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{3}{4}$

Çözüm 7. Soruda da belirtildiği gibi amacımız sonlu sayıda atlayışla kurbağanın suya varmamasını sağlayan en küçük r değerini bulmaktır. Kurbağamız her seferinde 90 derece sağa yada sola dönecektir. Amacı da bu adacıktan kurtulmak olan kurbağamız da ona göre strateji geliştirecektir. Varsayalım kurbağamız aşağıda şekilde verildiği üzere hareket etsin.



Şekil 1: Suya hasret kurbağa diyagramı..

Burada dikkat edilirse oluşan her yeni dik üçgende tanjant değeri 1/2 olacaktır. Bu da demektir ki, a, b, c noktaları ve oluşacak diğer yeni köşe noktaları doğrusal olacaktır. Öyleyse oluşan her bir yeni hipotenüz uzunluğunun toplamı,

$$\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4^2}+\frac{\sqrt{5}}{4^3}+\cdot+\frac{\sqrt{5}}{4^n}+\cdot$$

olacaktır. Eğer bu toplam geomerik seri toplamından hesaplanırsa,

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

olacaktır. Ancak dikkat edilirse elde edilen bu toplam n değeri sonsuza yaklaşırken hesaplanmıştır. yani ancak sonsuz sayıda atlayış sonucunda $r=\frac{\sqrt{5}}{3}$ en küçük yarıçaplı çemberin dışına çıkarak suya ulaşabilir. Ancak bu durum denildiği üzere sonsuz zıplayış için geçerlidir. Halbuki sonlu sayıda ulaşamayacağı en küçük r değeri istenmektedir. Demek ki istenen değer

$$r = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

olmalıdır.

Soru 8. İlk 2010 pozitif tam sayının rakamlarının toplamı kaçtır?

(A) 30516 (B) 28068 (C) 25020 (D) 20100 (E) Hiçbiri

Çözüm 8. $1, 2, 3, \cdots, 999$ sayılarının rakamları toplamını bulalım. Her bir rakam $\dfrac{1000}{10}$ kez bulunur. Bu durumda $1, 2, 3, \cdots, 999$ sayılarının rakamları toplamı

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) \cdot (\frac{1000}{10}) \cdot 3 = 13500$$

olur. Buna göre $1, 2, 3, \cdots, 1999$ sayılarının rakamları toplamı ise

$$2 \cdot 13500 + 1000 = 28000$$

olur. Geriye kalan sayılarımız 2000, 2001, 2002, 2003, 2004,$\cdots$,2009,2010 olur ki bu sayıların rakamları toplamı 68 olur. Buna göre istenilen toplam 28068 olacaktır. Doğru yanıt ”B” seçeneğidir.

Alternatif Çözüm. Varsayalım ilk 2010 sayının rakamları toplamı A ve ilk 2010 sayının toplamı B olsun. Modüler aritmetiği ve şıkları kullanarak çözüme ulaşmaya çalışalım.

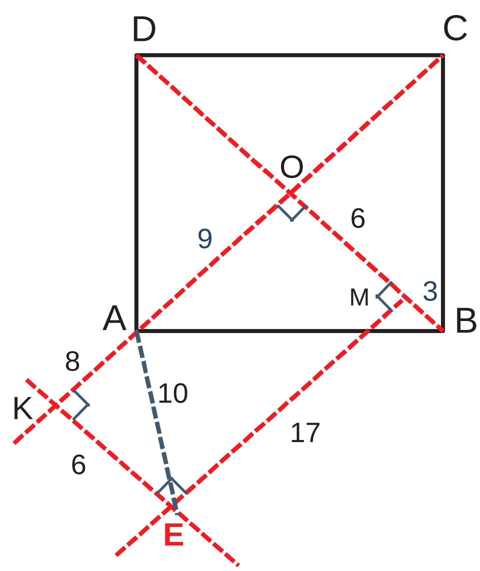
$$A \equiv B \,(\mathrm{mod} 3^x)\,, \; x \in \mathbb{Z}$$

olduğuna göre, $B \equiv 24 \,(\mathrm{mod} 27)$ olacağından $A \equiv 24 \,(\mathrm{mod} 27)$ olacaktır. Buna göre, $A = 28068 \equiv 24 \,(\mathrm{mod} 27)$ olacağından tek doğru yanıt ”B” seçeneği olacaktır.

Soru 9. Bir $ABCD$ karesinin dışındaki bir E noktasının AC doğrusuna uzaklığı 6, BD doğrusuna uzaklığı da 17 birimdir. E noktasının karenin en yakın köşesine uzaklığı 10 birim ise, karenin alanı nedir?

(A) 200 (B) 196 (C) 169 (D) 162 (E) 144

Çözüm 9. Sorunun çözümünü yapmak için soruda verilen kareyi ve E noktasını çizerek verilen uzunlukları yerleştirelim.



Buna göre, E noktasının $|AC|$ ve $|DB|$ doğrularına yani köşegenlerine olan uzaklıkları en yakın uzaklık olan dik uzaklıklar olacaktır. Yani, $|EK| \perp |CA|$ ve $|EM| \perp |DB|$ olacaktır. Buna göre oluşan dik üçgenden $|AK| = 8$ olduğunu görmek zor değildir. Çizilen şekildende görüleceği üzere $OKEB$ bir dikdörtgendir ve karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşittir. Öyleyse, $|EM| = |AK| + |AO|$ olacaktır. Buradan $|AO| = 9$ olduğuna göre, karenin alanı $A(ABCD) = (9\sqrt{2})^2 = 162$ olacaktır. Buna göre doğru cevap ”D” şıkkıdır.

Soru 10. $0 \leq n < 840$ koşulunu sağlayan kaç tam sayı için, $n^8 - n^4 + n - 1$ sayısı 840 ile bölünür?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8

Çözüm 10. Eğer soruda verilen $n^8 - n^4 + n - 1$ ifadesini çarpanlarına ayırırsak,

$$(n-1)(n^8 - n^4 + n - 1)$$

polinomu elde edilir. Burada $n = 1$ için

$$(n-1)\left(n^8 - n^4 + n - 1\right) \equiv 0 \,(\text{mod} 840)$$

olacağı açıktır. n değeri çift sayı ise, $P(n)$ tek sayı olacaktır. Bu durum $840|P(n)$ durumu ile çelişir. Demek ki n çift sayı değildir, tek sayıdır.

Eğer modüler aritmetik yöntemle çözüme gitmeye çalışırsak, $n \equiv 1\,(\text{mod}3)$, $n \equiv 1\,(\text{mod}5)$, $n \equiv 1\,(\text{mod}8)$ denkliklerine ulaşmak zor değildir. Benzer biçimde $n \equiv 1, 3\,(\text{mod}7)$ eşitliği de elde edilecektir. Yani n sayısı

$$n = 3k + 1 = 5t + 1 = 8r + 1$$

biçiminde olacaktır. Yani n sayılarımız

$$121, 241, 361, 481, 601, 721$$

olacaktır. Ancak bunların arasında (mod7) altında 1 kalanını veren tek sayı 241 dir. Buna göre soruda verilen $0 \leq n < 840$ aralığında sadece $n = 1$ ve $n = 241$ sayıları bulunur. Cevap "B" seçeneğidir.

Soru 11. $xy-$düzleminde $(\sqrt{20}, \sqrt{10})$ merkezli bir çemberin üstünde koordinatları tam sayı olan en çok kaç tane nokta bulunabilir?

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 1 (E) Hiçbiri

Çözüm 11.

Soru 12. $0 \leq a, b, c, d < 7$ olmak üzere, 7 nin $ab - cd$ yi bölmesini sağlayan kaç (a, b, c, d) tam sayı dörtlüsü vardır?

(A) 412 (B) 385 (C) 294 (D) 252 (E) Hiçbiri

Çözüm 12. a, b, c, d değerleri $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarını alacaklardır. Bizden istenen ise

$$ab - cd \equiv 0\,(\text{mod}7)$$

denkliğini sağlayan (a, b, c, d) dörtlülerini araştirmaktır. Buna göre, $a \cdot b$ ve $c \cdot d$ çarpımlarını (mod7) altında inceleyelim.

0.0≡0	1.0≡0	2.0≡0	3.0≡0	4.0≡0	5.0≡0	6.0≡0
0.1≡0	1.1≡1	2.1≡2	3.1≡3	4.1≡4	5.1≡5	6.1≡6
0.2≡0	1.2≡2	2.2≡4	3.2≡6	4.2≡1	5.2≡3	6.2≡5
0.3≡0	1.3≡3	2.3≡6	3.3≡2	4.3≡5	5.3≡1	6.3≡4
0.4≡0	1.4≡4	2.4≡1	3.4≡5	4.4≡2	5.4≡6	6.4≡3
0.5≡0	1.5≡5	2.5≡3	3.5≡1	4.5≡6	5.5≡4	6.5≡2
0.6≡0	1.6≡6	2.6≡5	3.6≡4	4.6≡3	5.6≡2	6.6≡1

$x \cdot y \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\,(\text{mod}7)$ tablosu

Buna göre, $ab - cd \equiv 0\,(\text{mod}7)$ durumlarını araştıralım, (mod 7) altında 0'a denk olan 13 ikili vardır. Farkları 0 olan ise toplam $13 \cdot 13 = 169$ tane dörtlü vardır. Benzer şekilde (mod7) altında 1'e denk olan 6 tane ikili var olduğuna göre, farkları (mod7) altında 0'a denk olan $36 = 6 \cdot 6$ tane dörtlü vardır. Yani, toplam dörtlülerimizin sayısı,

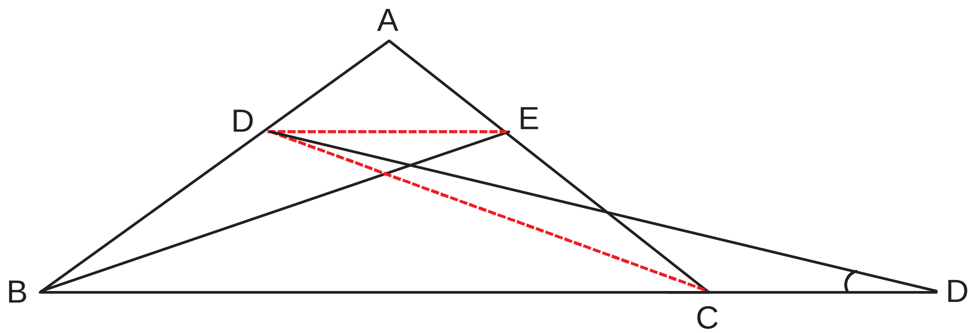
$$13 \cdot 13 + 6(6 \cdot 6) = 169 + 216 = 385$$

olacaktır. Buna göre istenen dörtlülerin sayısı, "B" seçeneğinde verilmiştir.

Soru 13. $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40°$ olan ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde sırasıyla, D ve E noktaları alınıyor. BC doğrusu üstünde C noktası, B ile F arasında kalacak biçimde bir F noktası alınıyor. $|BE| = |CF|$, $|AD| = |AE|$ ve $m(\widehat{BEC}) = 60°$ ise, $m(\widehat{DFB})$ kaçtır?

(A) 45° (B) 40° (C) 35° (D) 30° (E) 25°

Çözüm 13. Sorunun çözümü için önce soruda verilen üçgeni çizelim.



Buna göre, önce $|DC|$ ve $|DE|$ doğru parçalarını çizelim. ABC üçgeni bir eşkenar üçgen olduğuna göre, $|BE| = |CD|$ olacaktır. Buna göre DCF üçgeninde $|DC| = |CF|$ olacaktır. Eğer $m(DFC) = x$ olarak alırsak, ikizkenarlıktan $m(CDF) = x$ olacaktır. Buna göre iç ters açı olmaları durumundan dolayı $m(DCB) = 2x$ olduğunu görmek zor değildir. ABC üçgeni bir ikizkenar üçgen olduğundan, ADE üçgeni de bir ikizkenar üçgendir. Buna göre, DE doğru parçası $|BC|$ doğru parçasına paralel olacaktır. Benzer biçimde DC ve BE doğru parçalarının kesişim noktasını K olarak alırsak, BKC üçgenide bir ikikenar üçgen olacaktır. Bu durumda, $50° = 2x$ ise $x = 25°$ olacaktır. Doğru cevap ”E” seçeneğinde verilmiştir.

Soru 14. Gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak, her adımda doğru boyunca istediği yönde 364 veya 715 birim sıçrayan bir çekirgenin konduğu noktaların 2010 noktasına uzaklığı en az ne kadar olabilir?

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 34 (E) 164

Çözüm 14. Önce değişkenlerimizi isimlendirelim, buna göre; x : 364 ileri, y : 634 geri, z : 715 ileri, t : 715 geri, olarak belirlensin. Buna göre,

$$364x - 364y + 715z - 715t$$

alınan toplam yol olacaktır. Buradan,

$$(364x + 715z) - (364y - 715t) = 2010 + u, \qquad u \in \mathbb{Z}$$

olacaktır. Soruda bizden istenen değer aslında u değeridir. Eğer bu eşitliği düzenlersek,

$$13 \cdot (\underbrace{28x + 55z}_{A}) - 13 \cdot (\underbrace{28y - 55t}_{B}) = 2010 + u$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre, $13 \cdot (A - B) = 2010 + u$ ise $(A - B) = 155$ için ifade $13 \cdot 155 = 2015 = 2010 + u$ ise $u = 5$ olacaktır. Buna göre istenen cevap "A" seçeneği olacaktır.

Soru 15. x, y, z gerçel sayıları, $\dfrac{xyz}{x+y} = -1$, $\dfrac{xyz}{y+z} = 1$ ve $\dfrac{xyz}{z+x} = 2$ eşitliklerini sağlıyorsa, xyz aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

(A) $-\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ (B) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ (C) $-8\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ (D) $\dfrac{7}{\sqrt{15}}$ (E) Hiçbiri

Çözüm 15. Eğer soruda verilen eşitlikleri düzenlersek, $\dfrac{x+y}{xyz} = -1$, $\dfrac{y+z}{xyz} = 1$ ve $\dfrac{z+x}{xyz} = \dfrac{1}{2}$ eşitliklerini elde ederiz. Buradan $\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz} = -1$, $\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy} = 1$ ve $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz} = 1/2$ olacaktır. Eğer son yazılan üç eşitliği toplarsak

$$\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = 1/4$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre, $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{1}{xz} == -\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{yz} = -\dfrac{3}{4}$ olarak bulunacaktır. Buradan ,

$$\frac{1}{(xyz)^2} = \frac{15}{64}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre soruda istenen değer, $\pm\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ olacağından, sorunun doğru yanıtı ”A” seçeneğidir.

Soru 16. 11 farklı kitap üç raflı bir kitaplığa,en çok bir raf boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

(A) $75 \cdot 11!$ (B) $62 \cdot 11!$ (C) $68 \cdot 12!$ (D) $12 \cdot 13!$ (E) $6 \cdot 13!$

Çözüm 16. Raflarımıza yerleştireceğimiz kitapları yanyana 11! farklı biçimde dizebiliriz. Şimdi bu yanyana dizdiğimiz kitapları 3 raflı kitaplığa yerleştirelim. r_i=Raf ve $i = 1, 2, 3$ olduğuna göre

$$r_1 + r_2 + r_3 = 11$$

lineer denkleminin tamsayı çözümlerini araştırmamız gerekecektir. Buna göre, toplam yerleştirmemiz

$$\binom{11+3-1}{3-1} = 78$$

tane olacaktır. 78 tane farklı yerleştirme yapabiliriz anca bu yerleştirmelerin 3 tanesinde sırasıyla $(r_1, r_2), (r_1, r_3), (r_2, r_3)$ rafları boş kalacağına göre, bu durumlar istenmeyen durumlardır. Yani, istenen durumlar,

$$(78 - 3) \cdot 11! = 75 \cdot 11!$$

olacaktır. Buna göre doğru yanıt "A" şıkkıdır.

Soru 17. Uzayda yer alan A, B, C, D noktaları için, $|AB| = |AC| = 3$, $|DB| = |DC| = 5$, $|AD| = 6$ ve $|BC| = 2$ dir. BC doğrusunun D noktasına en yakın noktası P ve ABC üçgeninin bulunduğu düzlemin D noktasına en yakın noktası da Q ise, $|PQ|$ kaçtır?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ (C) $\frac{57}{2\sqrt{11}}$ (D) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$ (E) $2\sqrt{2}$

Çözüm 17.

Soru 18. 1000 elemanlı bir kümenin 500 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşağıdaki sayılardan hangisine bölünmez?

(A) 3 (B) 5 (C) 11 (D) 13 (E) 17

Çözüm 18. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

olduğuna göre, sorudaki ifade $\binom{1000}{500} = \dfrac{1000!}{500! \cdot 500!}$ olacaktır. Eğer 1000! ve 500! faktöriyel sayılarının ikisinide 11 sayısının katları biçiminde yazarsak $1000! = 11^{90} \cdot B$ ve $500! = 11^{45} \cdot C$ olacaktır. Buna göre,

$$\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{500! \cdot 500!} = \frac{11^{90} \cdot B}{11^{45} \cdot C \cdot 11^{45} \cdot C} = \frac{11^{90} \cdot B}{11^{90} \cdot C^2} = \frac{B}{C^2} \in \mathbb{Z}$$

olmasına rağmen $\dfrac{B}{C^2}$ tam sayısının içinde 11 çarpanı bulunmaz. Buna göre doğru cevap ”C” seçeneği olacaktır.

Soru 19. $x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomunun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?

(A) 0 (B) 1 (C) -2 (D) 6 (E) -17

Çözüm 19. $x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomunun köklerinin çarpımı -6 olduğuna göre, bu polinomunun tamsayı kökleri mutlaka -6 sayısının tam sayı bölenlerini içerecektir. Eğer $x = 2$ alınırsa $P(2) = 0$ olacaktır. Benzer biçimde $x = -1$ için de $P(-1) = 0$ olacaktır. Buna göre,

$$(x-2)\cdot(x+1)\cdot Q(x) = x^5 - 2x^2 - 9x - 6$$

eşitliğini yazabiliriz. Bundan sonrasında ister polinom bölmesini istesenizde $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomunu kullanarak çözüme gidebilirsiniz. Eğer ikinci yolu kullanırsak ve $Q(x)$ polinomunun katsayılarını polinom eşitliğinden bulursak yeni eşitliğimiz

$$(x-2)(x+1)(x+1)(x^2+3) = x^5 - 2x^2 - 9x - 6$$

olacaktır.

Buna göre kökler, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = i\sqrt{3}$, $x_5 = -i\sqrt{3}$ olarak bulunur. Farklı olan gerçel köklerin toplamı ise,

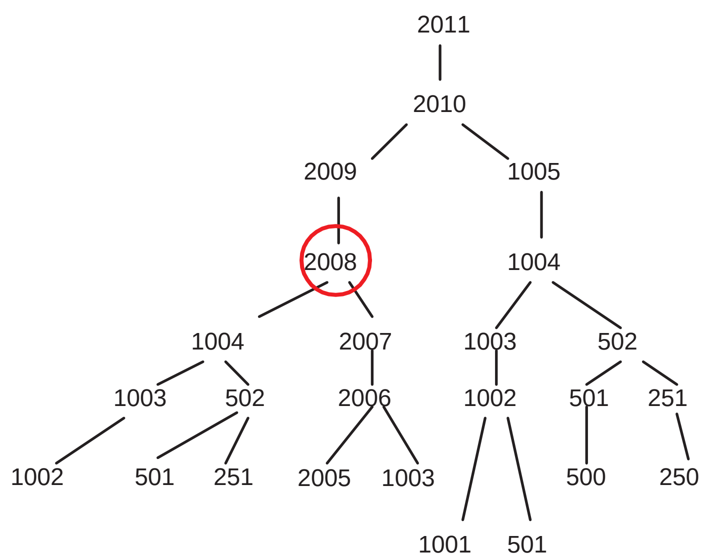
$$x_1 + x_2 = 2 - 1 = 1$$

olacağından doğru cevap "B" seçeneği olacaktır.

Soru 20. 0 sayısı ile başlanıp, her adımda bir önceki sayının 1 fazlası veya 2 katı alınarak, aşağıdaki sayılardan hangisini en az sayıda adımda elde edilir?

(A) 2011 (B) 2010 (C) 2009 (D) 2008 (E) 2007

Çözüm 20. Çözüme tersine işleyen bir ağaç diyagramı yada graph ile gitmek yerinde olacaktır. Buna göre,



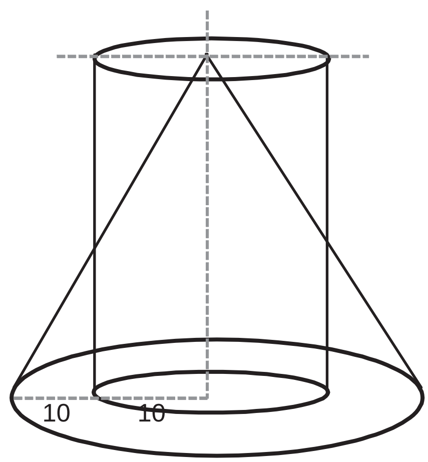
Şekil 2: Ağaç diyagramı.

yukarıda verilen ağaç diyagramı incelendiğinde en az basamakta ulaşılabilen sayının 2008 olduğu açıktır. Doğru cevap "D" şıkkıdır.

Soru 21. Merkezleri aynı ve yarıçapları 10 ve 20 birim olan iki düzlemdeş daireyi sırasıyla taban kabul eden, herbiri 20 birim yüksekliğinde bir dik silindir ve bir dik koni düzlemin aynı tarafında kalacak biçimde alınıyor. Koninin silindirin içinde kalan kısmının hacminin, silindirin dışında kalan kısmının hacmine oranı nedir?

(A) 3 (B) 2 (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) 1

Çözüm 21. Sorunun çözümü için şekli çizerek oranı istenen hacimleri belirlemek daha yerinde olacaktır.



Buna göre istenen hacimler oranı,

$$\frac{\text{Silindirin iinde kalan kısım}}{\text{Silindirin dında kalan kısım}} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 20 - \left[\pi \cdot 10^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10\right]}$$

eşitliğinden istenilen oran 1 olarak bulunacaktır. Buna göre, doğru cevap "E" seçeneğinde verilmiştir.

Soru 22. $\dfrac{x}{y+7} + \dfrac{y}{x+7} = 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

(A) 18 (B) 17 (C) 15 (D) 14 (E) 11

Çözüm 22. Eğer soruda verilen iki değişkenli denklemi düzenlersek elde edeceğimiz yeni denklem

$$y^2 - yx - (49 - x^2) = 0$$

olacaktır. Bu denklemi y değişkenine göre çözersek

$$y = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{196 - 3x^2})$$

olacaktır. $(x, y) \in \mathbb{Z}$ olduğuna göre, x değişkeni $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8$ değerlerinden bazılarını alacaktır. Eğer bu değerler yerine koyulursa istenen ikililer $(-8, -5)$, $(-8, -3)$, $(-5, -8)$, $(-5, 3)$, $(-3, -8)$, $(-3, 5)$, $(0, 7)$, $(3, -5)$, $(3, 8)$, $(5, -3)$, $(5, 8)$, $(7, 0)$, $(7, 7)$, $(8, 3)$, $(8, 5)$ olacaktır. Buna göre toplamda toplam 15 tane (x, y) tam sayı ikilisi vardır. Doğru cevap "C" şıkkıdır.

Soru 23. $1 \leq n \leq 2010$ koşulunu sağlayan kaç tane n tam sayısı için $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)$ sayısı 2010 ile bölünür?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

Çözüm 23.

Soru 24. On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 11 ile bölünebilen kaç tane yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır?

(A) 900 (B) 854 (C) 818 (D) 726 (E) Hiçbiri

Çözüm 24. Sayımızın tersten yazılımı ile kendisi aynı olduğuna göre, sayımız

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_3a_2a_1}$$

olarak yazılabilir. Bu sayı 11 ile bölünebildiğine göre,

$$2(a_1+a_3)-(2a_2+a_4)\equiv 0\,(\mathrm{mod}11)\ \text{ ve } 2(a_1+a_3-a_2)\equiv a_4\,(\mathrm{mod}11)$$

olacaktır. Burada a_4 basamağı $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ değerlerini alabilirler. Aslında çözüm sayımız $\overline{a_1a_2a_3}$ üç basamaklı sayısına bağlıdır. $a_1=0$ olamayacağına göre toplamda $9\cdot 10\cdot=900$ tane sayımız vardır. Eğer $a_1+a_3-a_2\equiv 5\,(\mathrm{mod}11)$ olursa $a_4\equiv 10\,(\mathrm{mod}11)$ olur ki bu durum imkansızdır. Şimdi diğer durumları inceleyelim,
$a_2=0$ ise $a_1+a_3=5$ olmalı , o zaman 5 tane $3'$lü vardır.
$a_1=1$ ise $a_1+a_3=6$ olmalı , o zaman 6 tane $3'$lü vardır.
$a_1=2$ ise $a_1+a_3=7$ olmalı , o zaman 7 tane $3'$lü vardır.
$a_1=3$ ise $a_1+a_3=8$ olmalı , o zaman 8 tane $3'$lü vardır.
$a_1=4$ ise $a_1+a_3=9$ olmalı , o zaman 9 tane $3'$lü vardır.
$a_1=5$ ise $a_1+a_3=10$ olmalı , o zaman 9 tane $3'$lü vardır.
$a_1=6$ ise $a_1+a_3=11$ olmalı , o zaman 8 tane $3'$lü vardır.
$a_1=7$ ise $a_1+a_3=12$ olmalı , o zaman 7 tane $3'$lü vardır.
$a_1=9$ ise $a_1+a_3=13$ olmalı , o zaman 6 tane $3'$lü vardır.
$a_1=0$ ise $a_1+a_3=14$ olmalı , o zaman 5 tane $3'$lü vardır. Örneğin son denklikte $(7,7)$, $(6,8)$, $(5,9)$, $(8,6)$, $(9,5)$ olmak üzere 5 tane değer vardır. Buna göre toplamda

$$2(5+6+7+8+9)=70$$

tane sağlamayan üçlü vardır. Ancak dikkat edilirse $a_2=7$, $a_2=8$ ve $a_2=9$ durumlarında (a_1,a_3) için fazladan (1,0), (2,0), (1,1), (3,0), (2,1), (1,2) durumları elde edilir. Yani toplamda 6 tane daha değer vardır. Bunun yanısıra

$$a_1+a_3-a_2\equiv 16\,(\mathrm{mod}11)$$

denkliğini sağlayan üçlülerde imkansız bir durum oluşturur. Buna göre,
$a_2=0,\ a_1+a_3=16$ ise $(a_1,a_3)=\{(8,8),(7,9),(9,7)\}$
$a_2=1,\ a_1+a_3=17$ ise $(a_1,a_3)=\{(8,9),(9,8)\}$
$a_2=2,\ a_1+a_3=18$ ise $(a_1,a_3)=\{(9,9)\}$ bu kısımda da 6 tane ikili vardır.

Buna göre, $900-(70+6+6)=818$ tane yedi basamaklı sayı vardır.

Soru 25. $m(\widehat{BAC}) = 90°$, $|AB| = 1$ ve $|AC| = \sqrt{2}$ olan bir ABC üçgeniyle aynı düzlemde yer alan P ve Q noktaları, $|PB| = 1 = |QB|$, $|PC| = 2 = |QC|$ ve $|PA| > |QA|$ koşullarını sağlıyorsa, $\dfrac{|PA|}{|QA|}$ nedir?

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (B) $5-\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+1$ (E) Hiçbiri

Çözüm 25.

Soru 26. m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 8

Çözüm 26. Şıklarda 5 çarpanına sahip olan tek seçenek (E) şıkkından başlayalım. Buna göre $m = 10$ için, eşitliğimiz

$$3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 10$$

olacaktır. Eğer eşitliğin her iki tarafına (mod5) altında bakılırsa yeni denkliğimiz

$$3x^2 + 4y^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

olacaktır. Bir $a \in \mathbb{Z}$ için $a^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod{5}$ olduğuna göre, (x^2, y^2) için seçebileceğimiz (mod5) altındaki kalan ikilileri $(0,1), (1,0), (0,4), (4,0), (1,4), (4,1)$ olacaktır. Ancak bu ikililerden hiçbiri $3x^2 + 4y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ denklemini sağlamaz. Buna göre, doğru cevap "D" şıkkı olacaktır.

Soru 27. Katsayılarının her biri 1 veya -1 ve tüm kökleri gerçel sayılar olan bir polinomun derecesi en fazla kaç olabilir?

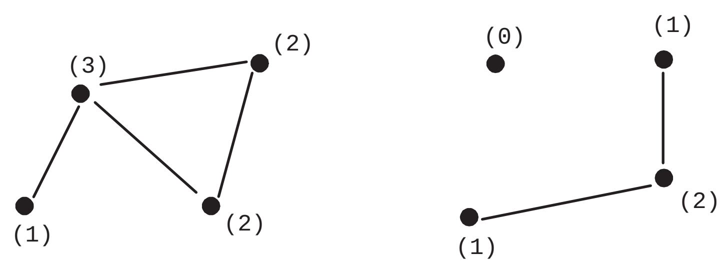
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) Hiçbiri

Çözüm 27.

Soru 28. 2010 kişinin yaşadığı bir köyde her ikiside aynı arkadaş sayısına sahip olan bir tek ikili varsa, bu sayı kaç farklı değer alabilir?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Hiçbiri

Çözüm 28. Soruda köyde yaşayan toplam kişi sayısı her ne kadar 2010 verilmişte olsa bu sayının sadece çift sayı olması dışında soruyu etkileyecek bir durumu yoktur. Varsayalım elimizde $n = 2010$ değil $n = 4$ bulunsun biz arkadaş sayıları $1, 2, 3$ olan grubu oluşturmaya çalışalım, çünkü dört kişilik bir grupta bir kişinin 4 arkadaşı olamaz. İki durumla karşılaşırız. Şimdi bu durumları aşağıda verilen çizgelerden inceleyelim. Düğüm noktalarında ki sayılar arkadaş sayılarını vermektedir.



Şekil 3: Birinci ve ikinci durum çizgeleri.

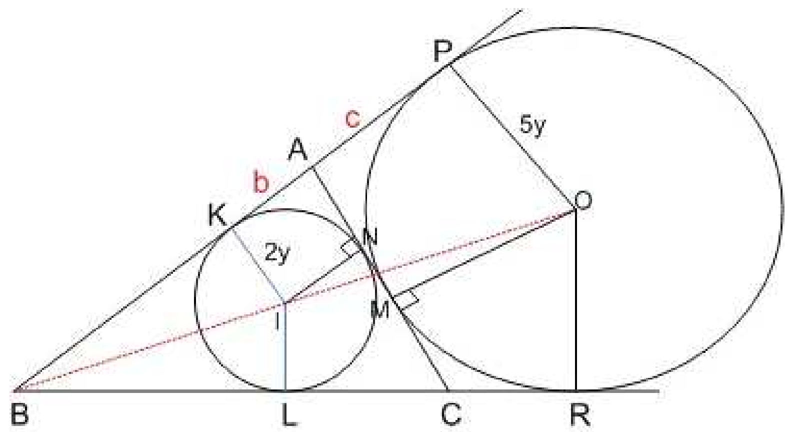
Birinci durumda arkadaş sayısı dizilimi $(1, 2, 2, 3)$ olurken ikinci durumda arkadaş sayısı dizilimi $(0, 1, 1, 2)$ olmaktadır. Buna göre, aynı arkadaş sayısına sahip bir tek ikli varsa bu sayı en fazla iki değer alabilir. $n = 2010$ olduğuna göre, birinci durumda aynı arkadaş sayısı $(1005, 1005)$ veya ikinci durumda aynı arkadaş sayısı $(1004, 1004)$ olacaktır.

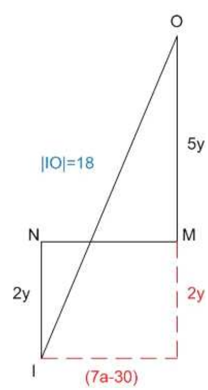
Not: Çizgeler yani Graph konusu ile alakalı daha fazla bilgi edinmek isteyen öğrencilere Matematik Dünyası Dergisi'nin Çizgeler konusunu derinlemesine işleyen sayısını okumalarını yada An Introduction to Combinatoric, Ralph P. Grimaldi kitabının ilk bölümünü çalışmalarını öneririz.

Soru 29. Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası I ve $[AC]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezi de O noktasıdır. $|BI| = 12$, $|IO| = 18$ ve $|BC| = 15$ ise, $|AB|$ kaçtır?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Çözüm 29. Sorulan şekli çizerek çözüme başlayalım.





Buna göre eğer $|BK| = 2a$ olarak alınırsa teğetlik durumundan $|BL| = 2a$ olacaktır. Ayrıca $|IL|$ ve $|IK|$ doğru parçaları yarıçap olarak sırasıyla, $|BC|$ ve $|BA|$ kenarlarına dik olacaktır. Benzer dik olma durumu O merkezli çemberin yarıçapları $|OP|$ ve $|OR|$ içinde geçerli olduğuna göre, PBO üçgeni KBI üçgenine benzer olacak ve

$$\frac{IK}{OP} = \frac{2}{5}$$

olacaktır. Yani $|IK| = 2y$ ve $|OP| = 5y$ eşitlikleri vardır. Benzer bir eşitlikte BOR üçgeni ile BIL üçgeni arasında mevcuttur. Buna göre, $|BL| = 2a$ ise $|LC| = 15 - 2a$ ve

$|CR| = 5a - 15$ olacaktır. Buradanda $|NM| = 7a - 30$ olduğunu görmek zor değildir. IKB üçgeni bir dik üçgen olduğuna göre,

$$(2a)^2 + (2y)^2 = 12^2 \text{ ve } y^2 + a^2 = 36$$

olacaktır. Eğer ilk çizdiğimiz şekile dikkat edilecek olursa, birbirine değen aşağıdaki gibi iki dik üçgenin oluştuğu farkedilecektir.

Şekilden de görüldüğü üzere,

$$(7y)^2 + (7a - 30)^2 = 18^2$$

eşitliği elde edilecektir. Eğer bu eşitlikte $y^2 = 36 - a^2$ dönüşümü yapılırsa, $a = 39/7$ bulunacaktır. Teğet olma durumu b ve c uzunlukları içinde incelenirse, $b - c = 7a - 30$ ve $b + c = 3a$ olacaktır. Bu iki eşitlikten $b = 5a - 15$ olarak bulunacaktır. Buna göre

$$|AB| = |BK| + |KA| = 2a + 5a - 15 = 7a - 15 = 7 \cdot \frac{39}{7} - 15 = 24$$

olarak bulunacaktır.

Soru 30. $N = \left[\left[\frac{2}{5}\right]\right] + \left[\left[\frac{2^2}{5}\right]\right] + \cdots + \left[\left[\frac{2^{2009}}{5}\right]\right]$ ise 2^{2010} un N ile bölümünden kalan nedir?

(A) 5034 (B) 5032 (C) 5031 (D) 5028 (E) 5024

Çözüm 30. Tam değer fonksiyonun tanımını kullanırsak, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[x] = x - \{x\}$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left[\left[\frac{2}{5}\right]\right] &= \frac{2}{5} - \left\{\frac{2}{5}\right\} \\
\left[\left[\frac{2^2}{5}\right]\right] &= \frac{2^2}{5} - \left\{\frac{2^2}{5}\right\} \\
\left[\left[\frac{2^3}{5}\right]\right] &= \frac{2^3}{5} - \left\{\frac{2^3}{5}\right\} \\
\vdots &= \vdots \\
\left[\left[\frac{2^{2009}}{5}\right]\right] &= \frac{2^{2009}}{5} - \left\{\frac{2^{2009}}{5}\right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Buna göre,

$$N = \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5} + \cdots + \frac{2^{2009}}{5} - \left[\left\{\frac{2}{5}\right\} + \left\{\frac{2^2}{5}\right\} + \cdots + \left\{\frac{2^{2009}}{5}\right\}\right]$$

olacaktır. Buradan

$$N = \frac{2}{5}\frac{(2^{2009} - 1)}{2 - 1} - \left[\left\{\frac{2}{5}\right\} + \left\{\frac{2^2}{5}\right\} + \cdots + \left\{\frac{2^{2009}}{5}\right\}\right]$$

olacaktır. Buna göre,

$$N = \frac{2^{2010} - 2}{5} - \left[\frac{r_0}{5} + \frac{r_1}{5} + \frac{r_2}{5} + \cdots + \frac{r_{2008}}{5}\right]$$

olacağından,

$$N = \frac{2^{2010} - 2}{5} - \left[\underbrace{\frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{6}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{6}{10} + \frac{2}{10} + \cdots}_{\text{502 tane 4 lügrup.}} + \frac{4}{10}\right]$$

olacaktır. Eğer bu eşitlği de düzenlersek,

$$N = \frac{2^{2010}}{5} - \left[502 \cdot 2 + \frac{4}{10}\right] \Rightarrow N = \frac{2^{2010} - 2}{5} - 1004 - \frac{2}{5}$$

eşitliğinden

$$N = \frac{2^{2010} - 2 - 5022}{5}$$

olacağından

$$5N + 5024 = 2^{2010}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$2^{2010} \equiv 5N + 5024 \equiv 5024 \pmod{N}$$

olacaktır. Buna göre doğru cevap "E" şıkkında verilmiştir.

Soru 31. Aşağıdaki (A, B) ikililerinden hangisi için

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y &= A \\ \frac{y}{y-x} &= B \end{aligned}$$

denklem sisteminin gerçel çözümü yoktur?

(A) $(1/2, 2)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (D) $(1, 1/2)$ (E) $(2, 2/3)$

Çözüm 31. Soruda verilen sistemi düzenlersek,

$$x^2 + x\left(\frac{Bx}{B-1}\right) + \left(\frac{Bx}{B-1}\right) = A$$

olacaktır. Eğer paydaları düzenlersek,

$$x^2(2B-1) + xB - A(B-1) = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem sisteminin reel çözümlerinin olmaması için $\delta < 0$ olmalıdır. Buna göre,

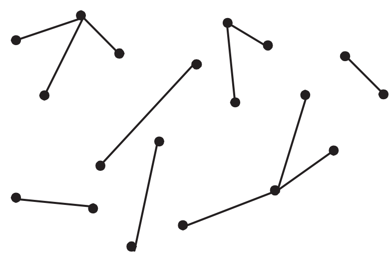
$$\Delta = B^2 + 4(2B-1)A(B-1) < 0$$

olacağından bu eşitsizliği sağlayan değerin $(A, B) = (2, 2/3)$ olduğunu görmek zor değildir. Doğru cevap ”E” seçeneği olacaktır.

Soru 32. 1001 kişilik bir okulda herhangi üç öğrenciden en az ikisi arkadaştır. Bu okulda en çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, $334, 412, 450, 499$ değerlerinden kaçını alabilir?

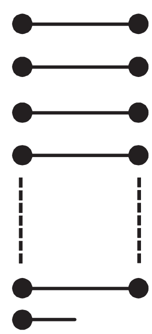
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) Hiçbiri

Çözüm 32. Varsayalım yeterli büyüklükte bir alanın(okulun) üzerinde 1001 tane noktamız(öğrencimiz) olsun ve ve bu noktalar birbirine arkadaşlık bağı ile bağlansın.



Şekil 4: 1001 tane nokta ve arkadaşlık bağları.

Eğer soruda verildiği gibi okul içerisinden seçebileceğimiz her üç kişiden en az iki tanesi arkadaş ise hiçbir arkadaşı olmayan nokta sayısı en fazla 1 tane olacaktır. Öyleki, arkadaşları karşılıklı tablo biçiminde yazdığımızda



Şekil 5: 500 çift.

yukarıdaki tabloyu elde ederiz. Ancak grafiğin sağ yada sol bloğundanda her üçlünün soruda verilen şartları sağlaması gerektiğinden 500 çift arasından tüm insanlar birbirini tanımak zorundadır. Buna göre, en fazla arkadaşı olan bir öğrenci en az 500 kişiyi tanımalıdır. Öyleyse 334, 412, 450, 499 değerlerinden hiçbirisi istenilen cevap olamaz.

Soru 33. $m(\widehat{ABC}) = 90°$ ve $|AC| = 10$ olan bir ABC üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D olmak üzere, $[AD]$ ve $[BD]$ nin orta dikmeleri E noktasında, $[BD]$ ve $[CD]$ nin orta dikmeleri de F noktasında kesişiyor. $|EF| = 13$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisini alabilir?

(A) $20\sqrt{\dfrac{2}{13}}$ (B) $15\sqrt{\dfrac{2}{13}}$ (C) $10\sqrt{\dfrac{2}{13}}$ (D) $5\sqrt{\dfrac{2}{13}}$ (E) Hiçbiri

Çözüm 33.

Soru 34. Aşağıdaki sayılardan hangisi $2^{2^{2010}} + 2^{2^{2009}} + 1$ sayısını böler?

(A) 19 (B) 17 (C) 13 (D) 11 (E) Hiçbiri

Çözüm 34. Eğer $2^{2^{2009}}$ sayısını x olarak alırsak, $2^{2^{2010}} = x^2$ olacaktır. Buna göre,

$$2^{2^{2010}} + 2^{2^{2009}} + 1 = x^2 + x + 1$$

eşitliği sağlanır. Bundan sonrasında sadece şıkları incelememiz yeterli olacaktır. Buradan x değerini $19, 17, 13, 11$ modlarında inceleyelim. Eğer

$$x \equiv 1, 2, 3, \cdots, 10 \,(\text{mod} 11)$$

ise

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \,(\text{mod} 11)$$

imkansızdır. Benzer durum 19 ve 17 içinde görülecektir. Şimdi de 13 modülünde inceleyelim,

$$x \equiv 1, 2, 3, \cdots, 10, 11, 12 \,(\text{mod} 13)$$

durumunda ise $x \equiv 3(\text{mod} 13)$ için

$$x^2 + x + 1 \equiv 9 + 3 + 1 \equiv 0 \,(\text{mod} 13)$$

olacaktır. Buna göre soruda verilen toplamı bölen tek değer 13 olarak bulunur. Doğru cevap ”C” seçeneği olacaktır.

Soru 35. Aşağıdaki ifadelerden hangisi, $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ koşullarını sağlayan tüm x, y gerçel sayıları için $x^3 + y^5$ ten küçük değildir?

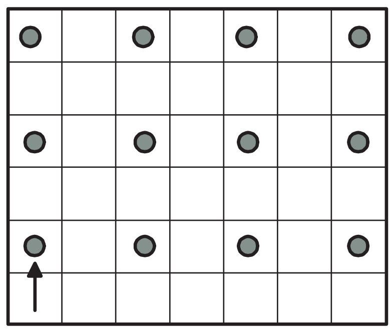
(A) x^2y (B) x^2y^2 (C) x^2y^3 (D) x^3y (E) xy^4

Çözüm 35.

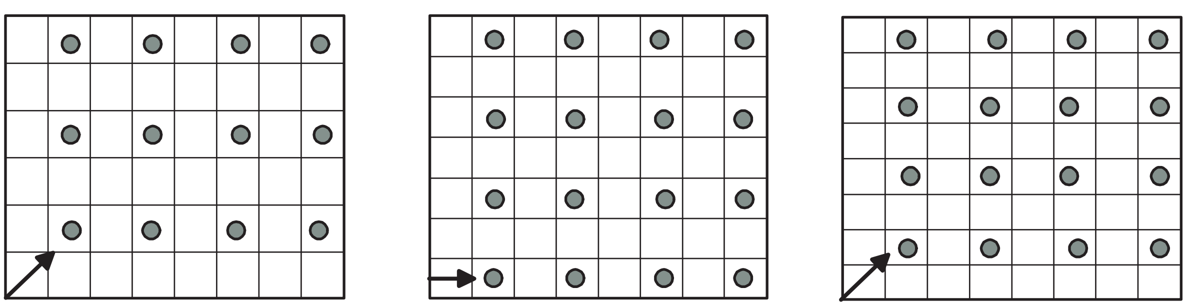
Soru 36. Başlangıçta $n \times n$ bir satranç tahtasının yalnızca sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırasıyla hamle yaparak, her hamlede taşı bulunduğu karenin hemen sağındaki, hemen üstündeki veya hemen sağ üst çaprazındaki kareye kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. oyun 6×7, 6×8, 7×7, 7×8 ve 8×8 tahtalarda birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Hiçbiri

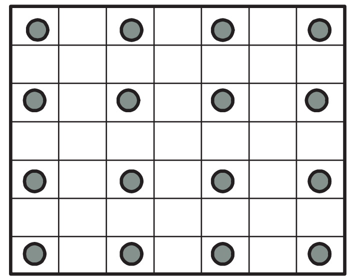
Çözüm 36. Soruda istendiği gibi, oyuna ilk başlayan oyuncu her zaman kazansın. Yani ilk oyuncunun oyunu daima kazanmak için bir stratejisi olsun ve bunu her tahtada uygulasın. Önce 6×7 boyutundaki tahtada başlayalım. Aşağıdaki tahtayı inceleyelim.



Buna göre eğer ilk oyuncu oyuna eğer • ile işaretlenmiş olan kareden başlarsa ve ikinci oyuncunun hamlelerine karşı her defasında • ile işaretli karelerde kalarak oyunu sürdürürse 6×7 boyutundaki tahtada daima kazanır. Benzer durum diğer tahtalar için de geçerlidir.



Buna göre yukarıda verilen tahtalarda oyuna ilk başlayan oyuncu, ok yönünde ilk hamlesini yapar ve işaretli kareler üzerinde hareket ederse, oyunu kesinlikle kazanacaktır. Ancak bu durum 7×7 boyutundaki tahta için geçerli değildir. Çünkü ilk oyuncu hangi hamle ile başlarsa başlasın, eğer ikinci oyuncu hamlelerini işaretli kareler içinde sürdürürse oyunu kesinlikle ikinci oyuncu kazanır. Buna göre sonuç olarak boyutlarından herhangi biri çift sayı olan her tahtada birinci oyuncunun kazanmasını garanti edebilen bir strateji



geliştiriyor olabilsek de, aynı şeyi her iki boyutuda tek sayı olan tahtalar için söyleyemeyiz. Doğru cevap ”D” seçeneği olacaktır.

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı

Cevap Anahtarı