Çözümler

1. Sayılarımız x, y ve z olsun.

$$P = xyz = 6(x+y+z) \quad \text{ve} \quad z = x+y \quad \text{olduğuna göre}$$

$xy(x+y) = 6(x+y+x+y) = 12(x+y)$ olacaktır. Buna göre $x \cdot y = 12$ olur.

$x=1$	$y=12$	ise $z=13$	$P_1 = 156$	
$x=2$	$y=6$	ise $z=8$	$P_2 = 96$	ise $P_1+P_2+P_3 = 336$ olur.
$x=3$	$y=4$	ise $z=7$	$P_3 = 84$	

2. Varsayalım sayımız $\overline{ab}$ olsun. $(\overline{ab})^2 = (a+b)^3$ ise

$(10a+b)^2 = (a+b)^3$

$(9a+a+b)^2 = (a+b)^3$

$81a^2 + 18a(a+b) + (a+b)^2 = (a+b)^3$ olur. Buradan

$9a(11a+2b) = (a+b)^3 - (a+b)^2$

$9a(11a+2b) = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b-1)}_{\text{Ardışık çarpım.}}$

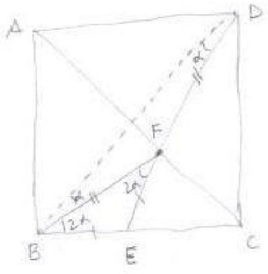
$9 \mid (a+b)$ ise $a+b=9$ veya $a+b=18$ olmalıdır.

$a+b=9$ ise $(\overline{ab})^2 = (9)^3 = (3^3)^2 = (27)^2$ ise $\overline{ab} = 27$

$a+b=18$ ise $(\overline{ab})^2 = (18)^3$ eşitliğine göre $\overline{ab}$ tamsayı olmaz.

Demekki tek sayı $\overline{ab} = 27$ olur.

3. Şekli çizelim



$|DF| = |BF|$ olduğuna göre: $AFD \cong AFB$ (K.K.K) olacağından F noktasının köşegen üzerinde olduğunu görmek zor değildir.

$s(BDF) = s(FBD) = \alpha$ ise

$s(BFE) = s(FBE) = 2\alpha$ olur.

Buradan $\alpha = 15^\circ$ ve $s(DFA) = 75^\circ$ bulunur.

4) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 10800 = 2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$ ise

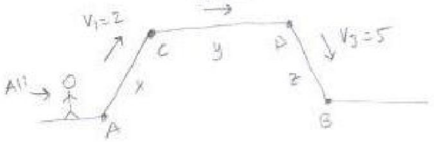
$a = 2^{n_1}\cdot 3^{m_1}\cdot 5^{k_1}$, $b = 2^{n_2}\cdot 3^{m_2}\cdot 5^{k_2}$, $c = 2^{n_3}\cdot 3^{m_3}\cdot 5^{k_3}$, $d = 2^{n_4}\cdot 3^{m_4}\cdot 5^{k_4}$

olacaktır. Bu sayıların çarpımı $2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$ olacaktır. Yani;

$n_1+n_2+n_3+n_4=4$, $m_1+m_2+m_3+m_4=3$, $k_1+k_2+k_3+k_4=2$ ise

$$\binom{4+4-1}{4-1} = 35 \;,\quad \binom{4+3-1}{4-1} = 20 \;,\quad \binom{4+2-1}{4-1} = 10 \;\Rightarrow\; 35\cdot 20\cdot 10 = 7000 \text{ olur.}$$

5) Şekli inceleyelim.

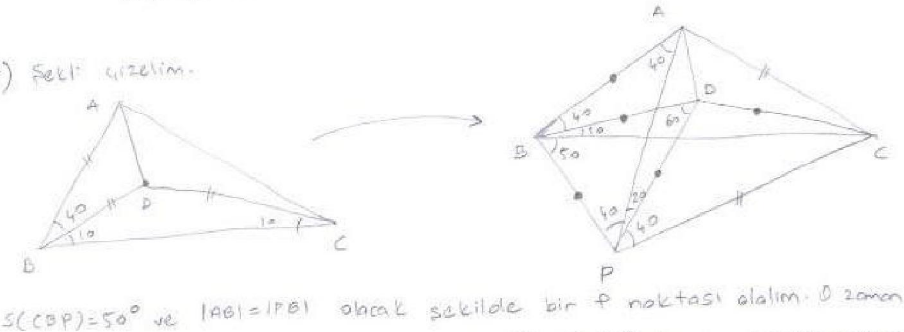


$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=39\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}&=12\\ \frac{z}{2}+\frac{y}{3}+\frac{x}{5}&=15 \end{aligned}\right\}$$ Denklem sisteminde 2. ve 3. denklemi 10 ile birinci denklemi −7 ile çarparsak ve taraf tarafa toplarsak

$-\frac{1}{3}y = -3 \Rightarrow y = 9$ olacaktır.

6) $xy+x+y+1=72$ ise $(x+1)\cdot(y+1)=72=2^3\cdot 3^2$ olan (x,y) pozitif tamsayılarından $xy(x+y)=2^4\cdot 5\cdot 11$ şartını sağlayan bulunmalıdır. Buradan $(x,y) = (1,35), (2,23), (3,17), (5,11), (7,8)$ olur. Denklem simetrik olduğundan $(y>x)$ ikililerini yazmadık. Bu ikililerden sadece $(5,11)$ ikilisi ikinci denklemi sağladığından $x^2+y^2=25+121=146$ olur.

7) Şekli çizelim.



$s(CBP)=50°$ ve $|AB|=|PB|$ olacak şekilde bir P noktası alalım. O zaman $ABC \cong PBC$ (K.A.K) olur. Bu durumda hem $|BD|=|BP|$ hem de $s(DBP)=60°$ olur yani BDP eşkenar üçgendir. $s(PDC)=s(BDC)-s(BDP)=100°$ ve $|PD|=|DC|$ ise $PDC \cong PBA$ (K.A.K) olur. Böylece $|PC|=|PA|$ bulunur. Tepe açısı 60° olan ikizkenar APC üçgeni, eşkenar üçgendir. Buradan $s(DAC)=30°$ olur.

(8) $\{1,2,3,\dots,n\}$ sayılarından seçilen, $a<b<c$ şeklindeki üç farklı sayıdan oluşan $\{a,b,c\}$ kümesini göz önüne alalım. Açıktır ki; $k=1,2,3,\dots,n-1$ için $b=k$ olur. b sayısı seçildikten sonra a sayısını seçmek için $n-k$ seçenek vardır. Buna göre,

$$\binom{n}{3}=\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)\cdot(n-k)$$ olur. Soruda $n=2000$ için çözüm olur. Demekki

$n=2000$ olmalıdır.

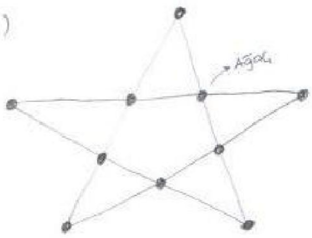
(9) Eğer $2009=3\cdot669+2$ ise en fazla $2\cdot3^{669}$ olur.

(10) 1 sayısına komşu olabilecek en küçük sayı 10 ve 11 olduğundan, $n\geq 11$'dir. 9'a komşu içinde 19 ve 29 olmalıdır. Yani

1, 11, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19, 21, 20, 10

ise n en küçük 29 olur.

(11)



Şekil yandaki gibi olur. Yani yıldızıl oluşur. Cevabın $72°$ olduğu açıktır.

(12) Soruda harf tekrarı belirtilmemiş. Yani 5 harfli 5^5 tane kelimeyi toplamda yazabiliriz. ALP olmasın istiyorsak

ALP__ , _ALP_ , __ALP durumlarını çıkarırız

$5^5-3\cdot5^2=25\cdot122=3050.$

(13) Bu soru 2010 ilköğretim matematik olimpiyatında sorulmuştur. www.sbelianwordpress.com adresinden çözüme bakabilirsiniz.

14) $m^2+3m^2n^2=30n^2+517$ eşitliğinden $m^2+3m^2n^2-30n^2-10=507$ olur.

Buna göre, $(m^2-10)+3n^2(m^2-10)=(m^2-10)\cdot(3n^2+1)=3\cdot 13^2$

$13\nmid(3n^2+1)$ ise $13\mid(m^2-10)$ olur. Ancak $(3n^2+1)=13^2$ olmayacağına göre

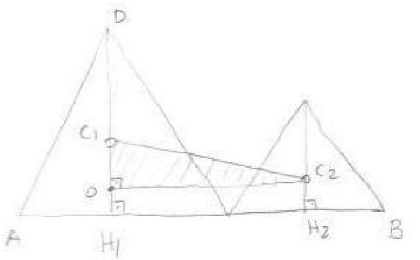
$m^2-10=3$ olamaz. Demek ki

$m^2-10=3\cdot 13=39$

$m=7$ ve $n=2$ olur.

$3m^2n^2=588$ olur.

15) Şeklimizi çizelim.



ACD ve CBE eşkenar üçgenlerdir,

$|DH_1|=\frac{5}{2}\sqrt{3}$, $|EH_2|=\sqrt{3}$

$|C_1H_1|=\frac{5}{6}\sqrt{3}$, $|C_2H_2|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

OC_1C_2 dik üçgeninden

$|C_1C_2|^2=|OC_1|^2+|OC_2|^2$ ise $|C_1C_2|=\sqrt{13}$ bulunur.

16) n tane çorabın m tanesi kırmızı ise $\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}=\frac{11}{24}$ ve

$m\cdot(m-1)=11k$ ve $n\cdot(n-1)=24k$ olur.

Buradan $24\mid n\cdot(n-1)$ ise $n=9$ veya $n=16$ olabilir.

17) $\left.\begin{array}{l} a=n\cdot(n+1) \\ b=n\,(n^2+n+1) \\ c=(n+1)\cdot(n^2+n-1) \end{array}\right\}$ Üçlüleri istenilen şartları sağladığına göre, sonsuz sayıda (a,b,c) üçlüsü vardır.

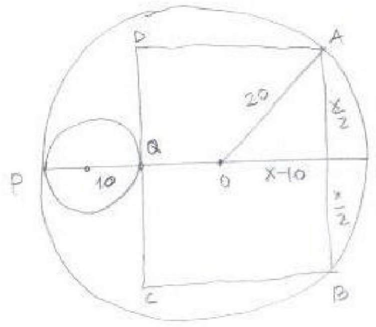
18) $n=a_n\cdot 10^n+\dots+a_1\cdot 10+a_0$ olsun. $n^2=10^2(\dots)+20\cdot a_1\cdot a_0+a_0^2$ olduğundan

$20\cdot a_1\cdot a_0+a_0^2$ toplamını incelemek yeterlidir. Buna göre olası sonuçlar tablosunu oluşturalım.

a_0	$20a_1\cdot a_0+a_0^2$	son iki rakam
0	00	00
1	$20a_1+1$	01, 21, 41, 61, 81
2	$40a_1+4$	04, 44, 84, 24, 64
⋮		
9	$180a_1+81$	81, 01, 41, 21, 01

Eğer tüm değerler yandaki tablodaki gibi bulunursa toplamda 22 farklı sayı elde edilecektir.

19) Şeklimizi çizelim,



Karenin bir kenarı x birim olsun.

AOH dik üçgeninde

$20^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x-10)^2$ ise

$x = 8 + 4\sqrt{19}$ olarak bulunur.

20) Eğer soruda verilen eşitlikleri toplarsak

$$\left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 - 2xy^3 + y^4\right) + (x^2 - 6x + 9) = 0$$

olacağından $\left(\frac{x}{2} - y\right)^4 + (x-3)^2 = 0$ ise

$x = 3$ ve $y = 3/2$ bulunur.