TAM DEĞER FONKSİYON
MATEMATİK OLİMPİYATI DERS NOTLARI

www.sbelian.wordpress.com
sbelianwordpress@gmail.com

1 Tamdeğer Fonksiyon

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x değerini geçmeyen en büyük tamsayı değeri $[x]$ ile gösterilir. Bu foksiyona tam değer fonsiyon (floor function) denir. Buna göre $x-1 < [x] \leq x$ olduğu açıktır. Bu ifade ayrıca $[x] \leq x < [x]+1$ olarakta yazılabilir. Ayrıca sayının ondalıklı kısmıda $\{x\}$ ile temsil edilir. Buna göre; $\{x\} = x-[x]$ dir. Buna göre $x = [x]+\{x\}$, $0 \leq \{x\} < 1$ dir. Tam değer fonksiyonun en temel teoremleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.1 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *$a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ise;*

1. $[\alpha + a] = [\alpha] + a$
2. $[\frac{\alpha}{n}] = [\frac{[\alpha]}{n}]$
3. $[\alpha]+[\beta] \leq [\alpha+\beta] \leq [\alpha]+[\beta]+1$

Kanıt:

1. Varsayalım $m = [\alpha + a]$ olsun. Buna göre $m \leq \alpha + a < m+1$ dolayısıyla da $m-a \leq \alpha < m-a+1$ olacaktır. $m-a = [\alpha]$ olduğuna göre ispat tamamlanmış olur.

2. $\frac{\alpha}{n}$ ifadesini $\frac{\alpha}{n} = [\frac{\alpha}{n} + \theta]$, $0 \leq \theta < 1$ olarak yazalım. $n \cdot [\frac{\alpha}{n}]$ ifadesi olduğnan artık elimizde 1 durumu oluştu. Yani;
$$[\alpha] = [n[\alpha/n] + n\theta] = n[\alpha/n] + [n\theta] \text{ olur.}$$
Şimdi, $0 \leq [n\theta] < n\theta < n$ ve bundan dolayı $0 \leq [n\theta/n] < 1$ olur.Eğer $\Theta = [n\theta]/n$ olduğunu varsayarsak $\frac{[\alpha]}{n} = [\frac{\alpha}{n}] + \Theta$, $0 \leq \Theta < 1$ olur ki, buda zaten istenen sonuçtur.

3. Varsayalım $\alpha = n+r$, $\beta = m+t$ ve $0 \leq r < 1$, $0 \leq t < 1$ olsun.
$$\begin{aligned} [\alpha]+[\beta] &= n+m \leq [n+r+m+t] = [\alpha+\beta] \text{ olur.} \\ &= m+n+[r+t] \leq n+m+1 \\ &= [\alpha]+[\beta]+1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 1.2 $[\frac{x}{3}] = \frac{x}{2} + 1$ *denklemini sağlayan x tamsayılarının toplamını bulunuz.*

Çözüm: Varsayalım $[\frac{x}{3}] = t$ olsun. Buna göre, $t \leq \frac{x}{3} < t+1$ ise $3t \leq x < 3t+3$ olmalıdır. $[\frac{x}{3}] = t = \frac{x}{2}+1$ olduğuna göre $x = 2t-2$ olur. Bu son eşitliği eşitsizliğimizde yerine koyarsak $3t \leq 2t-2 < 3t+3$ ise $-5 < t \leq -2$ bulunur. $t = -2, -3, -4$ olabileceğinden x değerleride $-8, -10, -6$ olarak bulunur. istenen cevap -24 olur.

Teorem 1.3 (Hermite's Identity) $[nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \cdot \ldots \cdot + [x + \frac{n-1}{n}]$ *dir.*

Kanıt: Eğer teoremde verilen eşitliği düzenlersek; $\sum_{k=0}^{n} [x + \frac{k}{n}] = [nx]$ ifadesini elde ederiz. Öyleyse bu eşitliği ispatlamamız yeterlidir. $x = [x] + \{x\}$ olduğunu zaten biliyoruz. Buna göre; $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinin elemanı olan kesin bir k' değeri vardır ki; $[x] = [x + \frac{k'-1}{n}] \le x < [x + \frac{k'}{n}] = [x] + 1$ ise
$0 = [\{x\} + \frac{k'-1}{n}] \le \{x\} < [\{x\} + \frac{k'}{n}] = 1$ olacaktır. Buna göre;

$$1 - \frac{k'}{n} \le \{x\} < 1 - \frac{k'-1}{n} \Rightarrow n - k' \le n\{x\} < n - k' + 1 \text{ olur.}$$

En başta yazdığımız eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} [x + \frac{k}{n}] = \sum_{k=0}^{k'-1} [x] + \sum_{k=k'}^{n-1} ([x] + 1) &= n \cdot [x] + n - k' \\ &= n[x] + [n\{x\}] \\ &= [n[x] + n\{x\}] = [nx] \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek 1.4 $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$ *denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.*

Çözüm: Bu soruda amacımız önce, denkliği sağlayan x değerlerinin varlığını araştırmak ve bu değerleri bulmak olacaktır. Konunun en başında verdiğimiz teoremlerden biliyoruz ki, $x - 1 < [x] \le x$ olacaktır. Buna göre;

$$x - 1 + 2x - 1 + 4x - 1 + \ldots + 32x - 1 < [x] + [2x] + \ldots + [32x] \le x + 2x + 4x + \ldots + 32x$$

ise $63x - 6 < 12345 \le 63x$ ve x değeride $195 < x < 196$ arasında olacaktır. Eğer x değerini 2 lik tabanda yazarsak $x = 195 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots$, $a_k = 0$ veya 1. Buna göre;
$[2x] = 2 \cdot 195 + a_1$
$[4x] = 4 \cdot 195 + 2a_1 + 2a_2$
$[8x] = 8 \cdot 195 + 4a_1 + 2a_2 + a_3$
$[16x] = 16 \cdot 195 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4$
$[32x] = 32 \cdot 195 + 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 + a_5$

Eğer bu değerleri alt alta toplarsak $63 \cdot 195 + 31 \cdot a_1 + 15 \cdot a_2 + 7a_3 + 3 \cdot a_4 + a_5$ olacaktır yani; $31 \cdot a_1 + 15 \cdot a_2 + 7 \cdot a_3 + 3 \cdot a_4 + a_5 = 60$ olur. Ancak $0 \le a_i \le 1$ olduğundan ifade en fazla $31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 57$ değerini alabilir. Çelişki vardır. Çözümü sağlayan bir x değeri yoktur.

Örnek 1.5 *$[x]$, x in tamdeğer foksiyonu olmak üzere, $\{x\} = x - [x]$ olarak tanımlansın. Her x reel sayısı için $x = f(x) - 2 \cdot f(\{x\})$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $x = -\frac{13}{5}$ noktasındaki değerini bulunuz.*

Çözüm:$\{-\frac{13}{5}\} = -\frac{13}{5} - (-3) = \frac{2}{5}$ oluğundan;
$x = \frac{2}{5}$ için $\frac{2}{5} = f(\frac{2}{5}) - 2 \cdot f(\{\frac{2}{5}\}) \Rightarrow f(\frac{2}{5}) = -\frac{2}{5}$ ise,
$x = -\frac{13}{5}$ için $-\frac{13}{5} = f(-\frac{13}{5}) - 2 \cdot f(\{-\frac{13}{5}\}) = f(-\frac{13}{5}) - 2 \cdot f(\frac{2}{5})$ ise
$f(-\frac{13}{5}) = -\frac{17}{5}$ olur.

Teorem 1.6 *a ve b aralarında asal doğal sayılar olmak üzere;*

$$[\frac{a}{b}] + [\frac{2a}{b}] + [\frac{3a}{b}] + \ldots + [\frac{(a-1) \cdot b}{b}] = \frac{(a-1) \cdot (b-1)}{2}$$

eşitliği vardır.

Kanıt: Aslında teoremde verilen ifadeyi düzenlersek;

$$\sum_{k=1}^{a-1}[\frac{kb}{a}] = \sum_{k=1}^{b-1}[\frac{ka}{b}] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

eşitliğini elde ederiz. Öyleyse bu eşitlikleri ispatlamamız yeterli olacaktır.Varsayalım analitik düzlem üzerinde, köşe koordinatları $(0,0),(0,b),(a,0),(a,b)$ olan bir dikdörtgenimiz olsun. Bu dikdörtgen üzerinde $(a-1)(b-1)$ tane latis (lattice) noktası, yani koordinat bileşnleri tamsayıar olan noktalar vardır. Bu dikdörtgeni $y=\frac{xb}{a}$ doğrusu ile iki parçaya ayıralım. Bu doğru üzerindeki başlangıç ve bitiş noktaları hariç hiçbir noktanın koordinatlarının tamsayı olmadığı açıktır. Eğer böyle bir nokta varsa, mesela (m,n), $0<m<a$, $0<n<b$, $\frac{n}{m}=\frac{b}{a}$ olmalıdır. Demek ki $\frac{n}{m}$ kesri, $\frac{b}{a}$ sadeleşebilen kesrinin bir sadeleşmi halidir. Ancak bu durum açık bir çelişkidir. Çünkü $(a,b)=1$ kabul etmiştik.
$L_k=(k,\frac{kb}{a})$, $1\leq k\leq a-1$ oktalarının her biri doğrunu üzerindedir. Buna göre $[\frac{kb}{a}]$ ifadesi $(k,0)$ dan $(k,\frac{kb}{a})$ noktasına giden doğrunun üzerindeki latis noktalarıdır. Yani

$$\sum_{k=1}^{a-1}[\frac{kb}{a}]$$

ifadesi dikdörtgenin alt yarısındaki latis noktalarının sayısıdır. Benzer biçimde,

$$\sum_{k=1}^{b-1}[\frac{ka}{b}]$$

ifadeside üst yarıdaki noktalar olduğuna göre ve bu noktalar alt ve üst yarıda eşit sayıda bulunabildiğine göre toplam nokta sayısının yarısı

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

sitenen cevap olur. ispat tamamlanır.

Örnek 1.7 (PUTNAM, 1948) *$n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ eşitliğini kanıtlayınız.*

Çözüm: İfadenin karesini alırsak $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ toplamının $\sqrt{4n+1}$ ile $\sqrt{4n+3}$ ifadelerinin arasında olduğunu görmek zor değildir. Tam kare ifadeler $mod4$ altında 0 veya 1 olduklarından $4n+2$ ve $4n+3$ ifadelerinin birer tam kare olmadıkları açıktır. Buna göre $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$ olduğu açıktır.

1.1 De - Polignac ve Legendre Formülü

Teorem 1.8 *$n!$ ifadesini bölen p asal sayısının en büyük kuvveti α ise*

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{n}{p^k}]$$

eşitliği vardır.

Örnek 1.9 *999! ifadesinin ondalık yazılımının sonunda kaç tane 0 vardır?*

Çözüm: Sıfırların sayısı çarpımdaki 2 ve 5 sayılarına bağlıdır buna göre $5^\alpha|999!$ olmasını sağlayan en büyük α değeri istenen cevap olacaktır. Buna göre;

$$[\frac{999}{5}]+[\frac{999}{5^2}]+[\frac{999}{5^3}][\frac{999}{5^4}]=179+39+7+1=246 \text{ olur.}$$

Örnek 1.10

$$7|\binom{1000}{500}$$

ifadesi doğruluğunu araştırınız.

Çözüm: $7^{\alpha}|1000!$ olmasını sağlayan en büyük α değeri‘;

$$[\frac{1000}{7}]+[\frac{1000}{7^2}]+[\frac{1000}{7^3}]=164$$

olacaktır. Benzer biçimde $7^{\alpha}|500!$ olmasını sağlayan en büyük α değeride 82 bulunur.

$$\binom{1000}{500}=\frac{1000!}{(500!)^2}$$

olduğundan, bu ifadeyi bölen 7 nin en büyük kuvveti $164-2\cdot 82=0$ olduğundan, soruda verilen ifade doğru değildir.

1.2 Çalışma Soruları

Soru 1.11

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$$

denkleminin doğal sayılardaki çözüm kümesinin elemanlarını bulunuz.

Çözüm: $x\in\mathbb{N}$ olduğuna göre;

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1},\ldots,\sqrt[3]{7}\to 1\cdot 7 &= 7\\
\sqrt[3]{8},\ldots,\sqrt[3]{26}\to 2\cdot 19 &= 38\\
\sqrt[3]{27},\ldots,\sqrt[3]{63}\to 3\cdot 37 &= 111\\
\sqrt[3]{64},\ldots,\sqrt[3]{124}\to 4\cdot 61 &= 244
\end{aligned}$$

ise $7+38+111+244=400$ ise tek çözüm $x=5$ olmalıdır.

Soru 1.12 $(6+\sqrt{35})^{1980}$ *açılımındaki virgülden sonraki ilk* 1000 *basamağın* 9 *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm:$(6+\sqrt{35})^{1980}+(6-\sqrt{35})^{1980}=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ olur. Burada $6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$ olmalıdır aksi durumda yani eğer $\frac{1}{10}<6-\sqrt{35}$ olursa, iki tarafın karesinden $3500<3481$ olur.

$$\begin{aligned}
0<(6-\sqrt{35})^{1980}<10^{-1980} \quad &\Rightarrow \quad 2k-\frac{1}{10^{1980}}<(6+\sqrt{35})^{1980}<2k\\
&\Rightarrow \quad 2k-1+\underbrace{0,999\ldots 9}_{1979 \text{ tane } 9}<(6+\sqrt{35})^{1980}<2k
\end{aligned}$$

Soru 1.13 $[x^2]=[x]$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm: $x^2\geq 0$ ise $[x^2\geq]$ olur. $x\in[0,1]$ aralığındaki tüm sayıların sağladığı açıktır. Biz $(1,2)$ aralığına bakalım;
$x=1+\{x\}$, $[(1+\{x\}^2)]=[1+\{x\}]$ ise $[1+2\{x\}+\{x\}^2]=[1+\{x\}]$
$[1+2\{x\}+\{x\}^2]=1$ $0\leq 2\{x\}+\{x\}^2<1\Rightarrow\{x\}>0$ veya $\{x\}^2+2\{x\}-1<0$ durumları oluşur. Buradan eğer $y=\{x\}$ olarak alırsak $y\in(0,\sqrt{2}-1)$ olmalıdır. Buradan da, $x\in(0,\sqrt{2})$ arasında olur. 0 zaten ahil olduğundan istenilen aralık $x\in[0,\sqrt{2}]$ bulunur.

Soru 1.14 (AIME, 1987)
$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$$
eşitsizliğini sağlayan en büyük n değeri kaçtır? (k değeri tektir).

Çözüm: Verilen ifadeyi düzenlersek
$$\frac{6n}{7} < k < \frac{7n}{8}$$
olacaktır. Fakat buradan $\frac{7n}{8} - \frac{6n}{7} = \frac{n}{56}$ bulunur. Buna göre eğer $n > 112$ ise, bu aralıkta kesinlikle, yani $(\frac{6n}{7}, \frac{7n}{8})$ aralığında, iki tamsayı olacaktır. $n = 112$ için ise, $96 < k < 98$ olacağından cevap 112 olmalıdır.

Soru 1.15 (AIME, 1991) *$r \in \mathbb{R}$ olmak üzere;*
$$\sum_{k=19}^{91} [r + \frac{k}{100}] = 546$$
ise $[100r]$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm: $546 = 7 \cdot 73 + 35 = 38 \cdot 7 + 35 \cdot 8$ olur. Demek ki
$$\begin{aligned} 7 &= [r+0,19] = [r+0,20] = [r+0,21] = \ldots [r+0,56] \\ 8 &= [r+0,57] = [r+0,58] = \ldots = [r+0,91] \end{aligned}$$
olacağından $7,43 \leq x < 7,44$ ise $74,3 \leq 100r < 74,4$ ve $[100r] = 74$ olur.

Soru 1.16 (AIME, 1995) *$f(n)$ fonksiyonu $n^{1/4}$ sayısına en yakın tamsayıyı temsil etmek üzere,*
$$\sum_{n=1}^{1995} \frac{1}{f(n)}$$
toplamının tamdeğerini bulunuz.

Çözüm: $f(k)$ ifadesi $1, 2, 3, \ldots, 7$ değerlerinden birini alır. Sınır değerler
$$(n+\frac{1}{2})^4 = n^4 + 2n^3 + \frac{1}{2} \cdot (3n^2 + n) + \frac{1}{16}$$
olduğuna göre
$$\begin{aligned} 5 \text{ tanesi} &: 1 \\ 34 \text{ tanesi} &: 1/2 \\ 111 \text{ tanesi} &: 1/3 \\ 260 \text{ tanesi} &: 1/4 \\ 505 \text{ tanesi} &: 1/5 \\ 870 \text{ tanesi} &: 1/6 \\ 210 \text{ tanesi} &: 1/7 \end{aligned}$$
olacağına göre, toplam 400 olur.

Soru 1.17 (LENINGRAD, 1994) $[x]$ *ifadesi x sayısının tamdeğerini temsil etmek üzere*

$$[\frac{1^2}{1998}],[\frac{2^2}{1998}],\ldots,[\frac{1997^2}{1998}]$$

dizisindeki farklı tamsayıların sayısını bulunuz.

Çözüm: $[\frac{998^2}{1998}] = 498 < 499 = [\frac{999^2}{1998}]$ olduğuna göre önce $k = 1,2,3,\ldots,998$ ve $k = 999,1000,\ldots,1997$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim. Buna göre, $k = 1,2,3,\ldots,997$ için

$$\frac{(k+1)^2}{1998} - \frac{k^2}{1998} = \frac{2k+1}{1998} < 1$$

olacaktır. Buna göre

$$[\frac{1^2}{1998}] = 0,1,2,\ldots,498 = [\frac{998^2}{1998}]$$

dizisinde her bir sayı en az bir defa tekrarlanacaktır. Buna göre dizinin bu bölümünde 499 terim vardır. $k = 999,1000,\ldots,1996$ ise

$$\frac{(k+1)^2}{1998} - \frac{k^2}{1998} = \frac{2k+1}{1998} > 1$$

ise burada da, $1997 - 999 + 1 = 999$ farklı terim vardır. Buna göre dizideki farklı tamsayıların sayısı 1498 olacaktır.