EŞİTSİZLİKLER
DERS NOTLARI-II*

Bazı fonksiyon eşitsizliklerini kanıtını yaparken, fonksiyonunun belli aralıklardaki şeklide önemlidir. Bu ders notumuzda ele aldığımız eşitsizliklerin çözümleride bu temel prensiplere uyularak yapılmıştır.

ISINMA

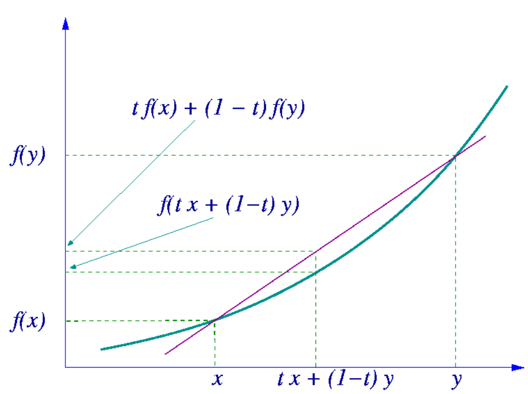
Tanım [Konveks vs. Konkav]. I aralığı üzerinde süreli bir f fonksiyonu,

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad x_1, x_2 \in \mathbf{I}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna *konveks* denir. Eğer I aralığı üzerinde f fonksiyonu *konveks* ve eşitlik hali $x_1 = x_2$ oluyorsa, f *tam konveks* olur. I aralığında $-f$ *konveks* ise f fonksiyonu *konkav* olur. Bu durumda,

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad x_1, x_2 \in \mathbf{I}$$

olacaktır. Benzer biçimde eğer $-f$ *tam konveks* ise f fonksiyonuda *konveks* olur.



Şekil 1: Aralıkta Bir Konveks Fonksiyon

Tanım [İkinci Türev Testi]. Eğer $\mathbf{I} = (a,b)$ aralığında $f''(x) \geq 0$ oluyorsa, f fonksiyonu konvekstir. Eğer $f''(x) > 0$ oluyorsa, f fonksiyonu tam konveks olur. Konkav ve tam konkav içinde tanım benzer biçimdedir. Sadece eşitsizlik yön değiştirir. Bir fonksiyonun konveksiliğini göstermek için sınır noktalarını içeren bir aralıkta ve bu aralıkta sürekli olması ile ikinci türev testinin negatif olmaması yeterlidir.

*Eşitsizlkler Ders Notları-I'e www.sbelian.wordpress.com adresinden ulaşabilirsiniz.

İkinci türev testini kullanarak, aşağıda verilen fonksiyoların tam konvex olduğunu söyleyebiliriz.

$$x^p \in [0,\infty)\,,\ p>1 \quad \text{yada} \quad x^p \in (0,\infty),\ p<0$$
$$a^x \in (-\infty,\infty),\ a>1 \quad \text{yada} \quad \tan x \in [0,\pi/2)$$

Benzer biçimde aşağıda verilen fonksiyonlarda tam konkavdır.

$$x^p \in [0,\infty)\,,\ 0<p<1 \quad \text{yada} \quad \log_a x \in (0,\infty),\ a>1$$
$$\cos x \in [-\pi/2,\pi/2), \quad \text{yada} \quad \sin x \in [0,\pi/2\pi)$$

Bu noktada, konveksliği ve konkavlığı eşitsizlik sorularında kullanabileceğimiz en güzel yer sanırız *Jensen Eşitsizliği*'dir.

MEVZU

Tanım [Jensen Eşitsizliği]. f fonksiyonu I üzerinde konveks ve $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{I}$ ise

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

olacaktır. Burada eşitlik durumu ancak ve ancak $x_1=x_2=\cdots=x_n$ eşitliğinde olur.

Tanım [Genelleştirilmiş Jensen Eşitsizliği]. f konveks ve I aralığında sürekli olmak üzere, $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{I}$ ve $0<t_1,t_2,\cdots,t_n<1$, $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$ ise,

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$$

olacaktır. Konkav fonksiyonlarda ise eşitsizlik yön değiştirir.

EGZERSIZ

[1.] Bir ABC üçgeninde,

$$\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

eşitsizliğini gösteriniz. Eşitlik durumu hangi durumda ortaya çıkar, açıklayınız.

Çözüm. $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ arasında konkavdır. Öyleyse,

$$\sin A+\sin B+\sin C = f(A)+f(B)+f(C) \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olacaktır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $A=B=C=\pi/3$ yani ABC bir eşkenar üçgense gerçekleşir.

[2.] $a,b,c>0$ ve $a+b+c=1$ ise,

$$(a+\frac{1}{a})^{10}+(b+\frac{1}{b})^{10}+(c+\frac{1}{c})^{10}$$

ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

Çözüm. $0<a,b,c<1$ olarak zaten verilmiş. $f(x)=(x+\frac{1}{x})^{10}$ ise f fonksiyonu $\mathbf{I}=(0,1)$ aralığında konveksdir. Çünkü,

$$f''(x)=90(a+\frac{1}{x})^8(x-\frac{1}{x^2})^2+10(x+\frac{1}{x})^9(\frac{2}{x^3})>0 \text{ olacaktır.}$$

Öyleyse JE'den

$$f(a)+f(b)+f(c)=(a+\frac{1}{a})^{10}+(b+\frac{1}{b})^{10}+(c+\frac{1}{c})^{10}\geq 3f(\frac{a+b+c}{3})=3f(\frac{1}{3})=\frac{10^{10}}{3^9}$$

olarak bulunur.

Çözüm.(Alternatif Yöntem) Soruda verilen eşitsizliği çözmenin bir diğer yöntemide Chebychev Eşitsizliğini kullanmak olabilirdi. Bu yöntemi size bırakıyoruz.[1]

[3.] Aritmetik Orta - Geometrik Orta eşitsizliği JE kullanarak göstermeye çalışalım. Buna göre, eğer $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ ise $f(x)=\log x$'de $(0,\infty)$ aralığında konkav olduğuna göre,

$$\log(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})\geq\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}=\log(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})$$

ise istenen eşitsizlik kanıtlanmış olur.

[4.](Hölder) $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $b_1,b_2,\cdots,b_n$ reel sayılarsa,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Varsayalım

$$A=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p \text{ ve } B=\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q$$

olsun. Eğer A veya B sıfır ise, ya tüm a_i'ler yada tüm b_i'ler sıfırdır. Bu da zaten eşitsizliğin iki tarafınıda sıfır yapar. Buna göre biz $A\neq 0$ ve $B\neq 0$ durumunu inceleyelim. Varsayalım $t_1=\frac{1}{p}$ ve $t_2=\frac{1}{q}$ olsun. Öyleyse, $0<t_1,\ t_2<1$ ve $t_1+t_2=1$ olacaktır. Eğer

$$x_i=\frac{|a_i|^p}{A} \text{ ve } y_i=\frac{|b_i|^q}{B}$$

ise

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1 \text{ ve } \sum_{i=1}^{n}y_i=1$$

olur. $f(x)=e^x$ fonksiyonu $(-\infty,+\infty)$ aralığında konveks olduğundan *Genelleştirilmiş Jensen Eşitsizliği*ni kullanabiliriz. Buna göre,

$$x_i^{1/p}\cdot y_i^{1/q}=f(t_1\ln x_i+t_2\ln y_i)\leq t_1f(\ln x_1)+t_2f(\ln y_i)=\frac{x_i}{p}+\frac{y_i}{q}$$

olacaktır. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i||b_i|}{A^{1/p}B^{1/q}}\leq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}y_i=1$$

olacaktır. Bundan dolayıda,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\leq A^{1/p}B^{1/q}=\left(\sum|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum|b_i|^q\right)^{1/q} \text{ bulunur}$$

[1] *Chebychev Eşitsizliği* ile alakalı olarak **www.sbelian wordpress.com** adresinden Yeniden *Düzenleme Eşitsizliği Ders Notları*'nı indirebilirsiniz.

Şimdi de, Jensen eşitsiliğinin bir başka uygulamasına geçelim.

Tanım (Majorization[2]). Eğer $x_1,\cdots,x_n$ ve $y_1,\cdots,y_n$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa, yani

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

$$x_1 \geq y_1, \quad x_1+x_2 \geq y_1+y_2, \cdots, x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \geq y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}$$

ve

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_n$$

ise $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ majorize $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ denir ve

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \succ y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

ile gösterilir.

Tanım (Majorization Eşitsizliği). $\mathbf{I}=[a,b]$ aralığında f fonksiyonu konveks ve

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \succ y_1,y_2,\cdots,y_n),\ x_i,y_i \in \mathbf{I}$$

ise

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geq f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)$$

olur. Yanlız ve yanlız $x_i=y_i$ durumu için eşitlik vardır. Konkav fonksiyonlar içinse eşitsizlik yön değiştirir.

[5.] Dar açılı bir ABC üçgeni için,

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Genelliği kaybetmeden, varsayalım $A \geq B \geq C$ olsun. Buna göre $A \geq \pi/3$ ve $C \leq \pi/3$ olacaktır. $\pi/2 \geq A \geq \pi/3$, $\pi \geq A+B=(-\pi-C) \geq \frac{2\pi}{3}$ olacağından

$$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0) \succ (A,B,C) \succ (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$$

alabiliriz. $f(x)=\cos x$ fonksiyonu $[0,\pi/2]$ aralığında konkav olduğuna göre, majorization teoreminden,

$$1 = f(\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{2})+f(0) \leq f(A)+f(B)+f(C) \leq f(\frac{\pi}{3})+f(\frac{\pi}{3})+f(\frac{\pi}{3})$$

ise soruda göstermemiz istenen,

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

elde edilir.

[6.] Eğer $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ ise

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \succ (x,x,x,\cdots,x)$$

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Majorization

durumu vardır. Burada x değeri, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ değerlerinin aritmetik ortasıdır.(Bunu *Majorization* üzerine uygularsak *Jensen Eşitsizliği*ni elde ederiz.)
Buna göre, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ için $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq kx$ durumunu göstermemiz yeterli olacaktır. Buna göre,

$$(n-k)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \geq (n-k)kx_k \geq k(n-k)x_{k+1} \geq k(x_{k+1} + \cdots + x_n)$$

olacağından

$$(n-k)(x_1 + \cdots + x_k) \geq k(x_{k+1} + \cdots + x_n)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin iki tarafınada $k(x_1 + \cdots + x_k)$ eklersek

$$n(x_1 + \cdots + x_n) \geq k(x_1 + \cdots + x_n) = knx$$

olacağından

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq kx$$

olacaktır.

[7.] $-1 \leq a, b, c \leq 1$ ve $a + b + c = 1/2$ ise $a^{12} + b^{12} + c^{12}$ en fazla kaç olur?

Çözüm. $[-1, 1]$ aralığında $f(x) = x^{12}$ fonksiyonu konvekstir. Öyleki, $f''(x) = 132x^{10} \geq 0$ olacaktır. Eğer, $1 \geq a \geq b \geq c \geq -1$ ve $a + b + c = -1/2$ ise major üçlülerimizi

$$(1, -\frac{1}{2}, -1) \succ (a, b, c)$$

olarak seçebiliriz. Çünkü, $1 \geq a$ ve $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \geq -c - \frac{1}{2} = a + b$ olacaktır. Buna göre, majorization eşitsizliğinden

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} = f(a) + f(b) + f(c) \leq f(1) + f(2) + f(-1) = 2 + \frac{1}{2^{12}}$$

olacaktır. Zaten, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ ve $c = -\frac{1}{2}$ içinde en büyük değer doğrulanır.

[8.](1999,IMO[3]) $n \geq 2$ bir tamsayıdır. Buna göre,

(a.)

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

eşitsizliğini $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geq 0$ reel sayıları için sağlayan en küçük C sabitini bulunuz.

(b.) Bu C değeri için, eşitlik durumunu araştırınız.

Çözüm. İlk olarak $n = 2$ durumuna bakalım. Varsayalım $x_1 = m + h$ ve $x_2 = m - h$ yani

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve } h = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

olsun. Buna göre,

$$x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = 2(m^4 - h^4) \leq 2m^4 = \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^4$$

[3]International Math Olympiads, 1999

olacaktır.
$n>2$ durumu için varsayalım

$$a_i=\frac{x_i}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \text{ ve } a_1+a_2+\cdots+a_n=1 \text{ olsun.}$$

Buna göre, $a_i=[0,1]$ olacaktır. Eğer, a_i cinsinden yazarsak, ispatlanacak eşitsizlik

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j(a_i^2+a_j^2)\le C$$

olacaktır. Eşitsizliğin sol tarafı açılıp düzenlenirse,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3(a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i^3(1-a_i)$$

olacaktır. $f(x)=x^3(1-x)=x^3-x^4$ fonksiyonunun $[0,1/2]$ aralığında konveks olduğu açıktır. Öyle ki,

$$f''(x)=6x-12x^2=6x(1-2x)>0$$

olacaktır. Eşitsizliğimiz a_i'lere göre simetrik olduğundan, $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$ alabiliriz.
Buan göre, eğer $a_1\le 1/2$ ise,

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\cdots,0)\succ(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

olacağından majorization eşitsizliğinden

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\le f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})+f(0)+\cdots+f(0)=\frac{1}{8}$$

olacaktır. Eğer, $a_1>1/2$ ise $1-a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,1/2)$ olacaktır.

$$(1-a_1,0,0,\cdots,0)\succ(a_2,a_3,\cdots,a_n)$$

olduğundan majorization eşitsizliği ve $n=2$ durumunu göz önünde bulundurursak,

$$\begin{aligned} f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) &\le f(a_1)+f(1-a_1)+f(0)+f(0)+\cdots+f(0)\\ &= f(a_1)+f(1-a_1)\le\frac{1}{8} \text{ olacaktır.}\end{aligned}$$

Buna göre, eşitlik durumu ancak ve ancak iki değişken eşit ve geri kalan $(n-2)$ değişken 0 ise vardır.

ALIŞTIRMALAR

1. Jensen Eşitisizliğini kullanarak $a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$ eşitsizliğini kanıtlayınız.(a,b,c pozitif reel sayılar.)

2. $x_1,\cdots,x_n \in [0,1]$ ve $a_1,\cdots,a_n > 0$ olmak üzere, $a_1+\cdots+a_n = 1$ olarak veriliyor. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+x_i} \leq \frac{1}{1+x_1^{a_1}\cdots x_1^{a_1}}$$

eşitsizliğini kanıttlayınız. Eşitlik durumu hangi şartlar altında gerçekleşir?

3. Eğer $a,b,c,d > 0$ ve $c^2+d^2 = (a^2+b^2)^3$ ise

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geq 1$$

eşitsizliğini Hölder Eşitsizliği kullanarak kanıtlayınız.

4. P noktası ABC üçgeni içersinde

$$m(PAB) = m(PBC) = m(PCA) = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir nokta ise α açısının $\pi/6$ olduğunu kanıtlayınız.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin iki açısı $\pi/6$'dan küçük veya eşittir. Buna göre,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

6. $x,y,z > 1$, $xyz = 4096$ ve $max(x,y,z) < 32$ olarak veriliyor. Buna göre, $x+y+z$ toplamının en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

7. Eğer $a,b \geq 0$ ise,

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}} \leq \sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.