Eşitsizlikler
Ders Notları-I

wwww.sbelian.wordpress.com

Eşitsizlikleri çözerken sıklıkla sayıları ve matematiksel ifadeleri karşılaştırırız. Yada bize verilen bir matematiksel ifadenin en büyük yada en küçük değerini bulmaya çalışırız. Bu ders notumuzda eşitsizlik sorularında sıklıkla karşımıza çıkan temel tip eşitsizlikleri ve uygulamalarını göreceğiz.

Aritmetik Orta-Geometrik Orta-Harmonik Orta Eşitsizliği. $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ve $a_i \in \mathbb{R}$ için,

$$AO = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq GO = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq HO = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

olacaktır. Eşitlik olması durumunda ise $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ olacaktır.

Örnek.(1)$A0 - GO$ eşitsiliği ile, $x > 0$ olmak üzere,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

olacaktır. Eşitlik ise $x = 1$ durumunda sağlanacaktır.

(2) $AO - HO$ eşitsizliğinden eğer $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ise

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$$

olacaktır.

(3) $a, b, c > 0$ ve $abc = 1$ ise $(a + b + c)(ab + cb + ac)$ çarpımının en küçük değerini bulunuz.

Çözüm.$AO - GO$ eşitsizliğinden,

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ ve } \frac{ab + bc + ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$$

ise

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) \geq 9$$

olacaktır. Buna göre istenen en küçük değer 9 olacaktır.

(4) $n \in \mathbb{Z}^+$ ise

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Varsayalım $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1+\frac{1}{n}$ ve $a_{n+1} = 1$ olarak alalım. Buna göre, $AO-GO$ eşitsizliğinden

$$AO = \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \geq GO = \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n \cdot 1}$$

eşitsizliğinden soruda istenen durum elde edilir.

(5)(1964, IMO) a, b, c bir üçgenin kenar uzunluklarıdır. Buna göre,

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

eşitizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Varsayalım,

$$x = \frac{a+b-c}{3}, \quad y = \frac{b+c-a}{2}, \quad z = \frac{c+a-b}{2}$$

olarak alalım. Buradan $a = x+z$, $b = x+y$, $c = y+z$ olacağından eşitsizliğimiz

$$(x+z)^2 2y + (x+y)^2 2z + (y+z)^2 2x \leq 3(z+x)(x+y)(y+z)$$

olacaktır. Eğer son bulduğumuz son eşitsizliği düzenlersek,

$$x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6xyz$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan eşitsizliğin sol tarafına $AO-GO$ eşitsizliği uygulanırsa soruda istenen eşitsizlik kanıtlanmış olur.

(6)(2008, AUMO[1]) n doğal sayısının kaç tane değeri için,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} &= 1 \end{aligned}$$

denklem siteminin pozitif reel sayılarda çözümü vardır?

Çözüm. $AO-HO$ eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow \frac{n}{1} \leq \frac{9}{n} \Rightarrow n^2 \leq 9$$

olduğuna göre, $n = 1, 2, 3$ değerlerini alabilir. Ancak, $n = 1$ değeri için doğrulanmadığı açıktır. Öyleyse sadece 2 ve 3 için çözümlüdür.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ve $b_1, b_2, \cdots, b_n$ reel sayıları için

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu $a_ib_j = a_ib_j$, $i, j = 1, \cdots, n$ için vardır.

(7) $0 \leq \theta < 2\pi$ için

$$a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$$

[1] Antalya Üniversitesi Matematik Olimpiyatları, 2008

ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Çözüm. $C.S.$ eşitsizliğinden

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 \le (a^2+b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

eşitsizliğinden,

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos\theta + b\sin\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$$

aralığı bulunur.

(8)(1978, USAMO[2]) a, b, c, d, e reel sayıları için $a+b+c+d+e=8$ ve $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ ise, e'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm. $C.S.$ eşitsizliğinden,

$$(a+b+c+d)^2 \le (1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

ise

$$(8-e)^2 \le 4(16-e^2)$$

olacaktır. Buradan da, $e(5e-16) \le 0$ ise $0 \le e \le 16/5$ olacaktır. $C.S.$ eşitsizliğinin, eşitlik duruu kullanılırsa $a=b=c=d=6/5$ ve $e_{\max}=16/5$ olacaktır.

(9) $a, b, c > 0$ ve $abc = 1$ ise

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

eşitizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. $x = \frac{1}{a} = bc$, $y = \frac{1}{b} = ac$, $z = \frac{1}{c} = ab$ alırsak, eşitsizliğin son hali

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

olacaktır. Burada,

$$x+y+z = \frac{x}{\sqrt{z+y}}\sqrt{z+y} + \frac{y}{\sqrt{x+z}}\sqrt{x+z} + \frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}$$

eşitliğine $C.S.E.$ eşitsizliğini uygularsak,

$$(x+y+z)^2 \le (\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y})((z+y)+(x+z)+(y+x))$$

olacaktır. Son eşitsizliği ve $A.O.-G.O.$ eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

Yeniden Düzenleme (Permütasyon) Eşitsizliği. $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ ve $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ ise,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_{r_1} + a_2b_{r_2} + \cdots + a_nb_{r_n} \ge a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

[2] United States Of America Math Olympiads, 1978

eşitsizliği vardır. Burada $(b_{r_1}, b_{r_2}, \cdots, b_{r_n})$ dizilimi $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ diziliminin bir permütasyonudur.

(10)(1978, IMO[3]**)** $c_1, c_2, \cdots, c_n$ farklı pozitif tamsayılardır. Buna göre,

$$c_1 + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Varsayalım $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dizilimi c_i'lerin artan sırayla dizilimi olsun. a_i'ler farklı pozitif tamsayılar olduğuna göre, $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2, \cdots$, $a_n \geq n$ diyebiliriz. Burada,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

ve

$$1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$$

ise $Y.D.E.$'ne göre

$$c_1 + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

olacaktır.

(11) Örnek **(9)**'u **Y.D.E.** kullanarak yapınız.

Çözüm. x, y, z için tanımlamalarımız **(9)**'daki gibi olsun. Genelliği kaybetmeden $x \geq y \geq z$ alalım. $xyz = 1$ ve $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ olduğuna göre $1/(z+y) \geq 1/(x+z) \geq 1/(y+x)$ üçlüsüde ikinci dizilimimiz olsun. Bu noktada $Y.D.E.$'yi iki defa uygularsak,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z} \\
\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{z+y}
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$a^2 + b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$$

eşitsizliğini, sağ tarafın payları için kullandıktan sonra $A.O. - G.O.$ eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{y+x}{2} + \frac{z+y}{2} + \frac{x+z}{2}\right) = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Chebyshev Eşitsizliği. Eğer $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ve $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ ise

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)}{n}$$

[3] International Math Olympiads, 1978

eşitsizliği vardır.

(12)(1974, USAMO[4]) $a, b, c > 0$ ise

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Üçlülerimizi (a, b, c) ve $(\log a, \log b, \log c)$ olarak seçersek,

$$\begin{aligned} a\log a + b\log b + c\log c &\geq (a+b+c)(\log a + \log b + \log c)\frac{1}{3} \\ \log a^a b^b c^c &\geq \frac{(a+b+c)}{3}\log(abc) \\ \log a^a b^b c^c &\geq \log(abc)^{(a+b+c)/3} \\ a^a b^b c^c &\geq (abc)^{(a+b+c)/3} \end{aligned}$$

olacaktır.

(13) $0 \leq a_k < 1$, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ ve $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} \geq \frac{nS}{n-S}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Genelliği kaybetmeden $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq 0$ alabiliriz. Buna göre,

$$0 < 1 - a_1 \leq 1 - a_2 \leq \cdots \leq 1 - a_n \text{ ve } \frac{a_1}{1-a_1} \geq \frac{a_2}{1-a_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{1-a_n}$$

olacaktır. Chebysev eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-a_1}(1-a_1) + \frac{a_2}{1-a_2}(1-a_2) + \cdots + \frac{a_n}{1-a_n}(1-a_n) \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k) = \frac{n-S}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k} \text{ olacaktır.} \end{aligned}$$

Matematikte ve tabii ki istatistikte sıklıla ortalamalrı kullanmaya ihtiyaç duyarız. AO, GO, HO dışında kullandığımız *Kuvvet Ortalaması* ve *Simetrik Ortalar*da vardır. Aslında, bu iki ortalama AO ve GO'yıda özel birer durum olarak içerir.

Kuvvet Ortalaması Eşitsizliği. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n > 0$ ve $s < t$ için

$$M_s = (\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n})^{1/s} \leq M_t = (\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n})^{1/t}$$

eşitsizlikleri vardır. Eşitlik $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ durumunda vardır.

[4]United States Of America Math Olympiads, 1974

Not. Bu eşitsizlikte $M_1 = A.O.$, $M_{-1} = H.O.$ ve M_2 ise Karesel Ortalamadır. Karesel Orta istatistik ve fizikte kullanılır. Ayrıca, limitlerini alırsak, $M_{+\infty}$ ifadesi $MAX = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ ve M_0 ifadesi Geometrik Orta ve de $M_{-\infty}$ ifadesi $MIN = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ olacaktır. Dolayısıyla elimizde,

$$MAX \geq KO \geq AO \geq GO \geq HO \geq MIN$$

eşitsizliği oluşacaktır.

Maclaurin Simetrik Orta Eşitsizliği. $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ için

$$AO \geq S_1 \geq S_2^{1/2} \geq \cdots \geq S_n^{1/n} = GO$$

olacaktır. Mesela, S_j ifadesine $n = 4$ için bakalım

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \\
S_2 &= \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4}{6} \\
S_3 &= \frac{a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4}{4} \\
S_4 &= a_1a_2a_3a_4
\end{aligned}$$

olacaktır.

(14) x, y, z pozitif sayılar olduğuna göre,

$$x^5 + y^5 + z^5 \leq x^5\sqrt{\frac{x^2}{yz}} + y^5\sqrt{\frac{y^2}{zx}} + z^5\sqrt{\frac{z^2}{xy}}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Varsayalım $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, $c = \sqrt{z}$ olsun. Buna göre eşitsizliğimiz,

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} \leq \frac{a^{13} + b^{13} + c^{13}}{abc}$$

olacaktır. Buna göre, KOE'yi kullanırsak

$$a^{13} + b^{13} + c^{13} = 3M_{13}^{13} = 3M_{13}^{10}M_{13}^{3} \geq 3M_{10}^{10}M_0^3 = (a^{10} + b^{10} + c^{10})abc$$

olacaktır.

(15) $a, b, c > 0$ ise,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm. Eşitsizliği düzenlersek,

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^3b^3c^3(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = (abc)^2(bc + ac + ab)$$

olacaktır. KOE ve SOE'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned}
a^8 + b^8 + c^8 = 3M_8^8 &\geq 3M_1^8 = 3S_1^8 = 3S_1^6S_1^2 \\
&\geq (S_3^{1/3})^6 3(S_2^{1/2})^2 = (abc)^2(bc + ac + ab)
\end{aligned}$$

olacaktır.

(16) $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$ ve $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) = 2^n$ ise,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. SO eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \\ &= 1 + nS_1 + \binom{n}{2} S_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} S_{n-1} + S_n \\ &\geq 1 + nS_n^{1/n} + \binom{n}{2} S_n^{2/n} + \cdots + \binom{n}{n-1} S_n^{\frac{n-1}{n}} + S_n = (1+S_n^{1/n})^n \end{aligned}$$

ise $2 \geq 1 + S_n^{1/n}$ ve $1 \geq S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Konu anlatımında verilen tüm örnekleri çözümlerine bakmadan yapınız.

2. $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ için

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

3. $0 < a, b, c < 1$ ve $a + b + c = 2$ ise

$$8(1-a)(1-b)(1-c) \leq abc$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

4. Eğer $a, b, c, d > 0$ ve $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3$ ise

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geq 1$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

5. $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ve $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ise

$$(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_2 + \frac{1}{a_2})^2 + \cdots + (a_n + \frac{1}{a_n})^2$$

ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

6. Eğer $a, b, c, d > 0$ ve $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ise

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq S$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

7. Eğer $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ ve $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1 - x_k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

8. a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olduğuna göre,

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.