

19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

SORU 35. Aşağıdaki fonksiyonlar arasında pozitif gerçel sayılar kümesinde aldığı en büyük değer en küçük olan hangisidir?

A. $\frac{x^2}{1+x^{12}}$ B. $\frac{x^3}{1+x^{11}}$ C. $\frac{x^4}{1+x^{10}}$ D. $\frac{x^5}{1+x^9}$ E. $\frac{x^6}{1+x^8}$

Çözüm. Sorunun çözümü için temel Aritmetik Orta - Geometrik Orta eşitsizliklerini kullanalım. Buna göre her bir seçenek için eşitsizliği yazmaya çalışalım.

$$\frac{\frac{1}{5} \cdot 5 + x^{12}}{6} \geq \frac{x^2}{5^{5/6}} \text{ ise } \frac{x^2}{x^{12}+1} \leq \frac{5^{5/6}}{6} \text{ olur,}$$

$$\frac{\frac{1}{8} \cdot 8 + 3 \cdot \left(\frac{x^{11}}{3}\right)}{11} \geq \frac{x^3}{3^{3/11} \cdot 2^{24/11}} \text{ ise } \frac{x^3}{x^{11}+1} \leq \frac{4}{11} \cdot 2^{2/11} \cdot 3^{3/11} \text{ olur,}$$

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot 6 + 4 \cdot \left(\frac{x^{10}}{4}\right)}{10} \geq \frac{x^4}{3^{3/5} \cdot 2^{7/5}} \text{ ise } \frac{x^4}{x^{10}+1} \leq \frac{1}{5} \cdot 2^{2/5} \cdot 3^{3/5} \text{ olur,}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot 4 + 5 \cdot \left(\frac{x^9}{5}\right)}{9} \geq \frac{x^5}{5^{5/9} \cdot 4^{4/9}} \text{ ise } \frac{x^5}{x^9+1} \leq \frac{1}{9} \cdot 5^{5/9} \cdot 2^{8/9} \text{ olur,}$$

$$\frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{x^8}{3}\right)}{4} \geq \frac{x^6}{3^{3/4}} \text{ ise } \frac{x^6}{x^8+1} \leq \frac{3^{3/4}}{4} \text{ olacaktır.}$$

Her bir ifadenin alabileceği en büyük değerleri hesaplamış olduk. Şimdi de bu değerlerin en küçük olanına bakalım. Eğer bu sonuçları birbirine oranlarsak, **D seçeneğinde** elde etmiş olduğumuz

$$\frac{1}{9} \cdot 5^{5/9} \cdot 2^{8/9} \text{ ifadenin en küçük olduğunu görebiliriz.}$$

