19. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

SORU ÇÖZÜMLERİ

**SORU 2.** $(x+1)^{65}$ polinomunun kaç katsayısı 65 e bölünemez?

**A.** 20

**B.** 18

**C.** 16

**D.** 3

**E.** Hiçbiri

**Çözüm.** Eğer $(x+1)^{65}$ polinomunu açmaya çalışsaydık karşımıza

$$x^{65}\binom{65}{0}+x^{64}\binom{65}{1}+x^{63}\binom{65}{2}+\cdots+x^{3}\binom{65}{62}+x^{2}\binom{65}{63}+x\binom{65}{64}+1\binom{65}{65}$$

şeklinde devasa bir polinom çıkacaktı. Aslında soruda istenilen değer $\dfrac{65!}{(65-n)!\cdot n!}\equiv 0 \pmod{65}$ denkliğini sağlamayan n değişkenlerinin sayısıdır. Eğer $65!$ sayısını incelersek, $65!=13^{5}\cdot 5^{15}\cdot A,\ \ A\in\mathbb{Z}^{+}$ formunda bir sayı olduğunu görebiliriz. Öyleyse, denkliğin sağlanmaması için paydada bulunan $(65-n)!\cdot n!$ formundaki sayının asal çarpanlarına ayrıldığında 13 ve 5 in kuvvetlerinin sırasıyla 5 ve 15 sayılarından büyük veya eşit olmaları gerektiğini görmek zor değildir.

Buna göre, çarpanlarında bu durumu sağlayan binom katsayıları,

$$\binom{65}{0}=\binom{65}{65},\binom{65}{5}=\binom{65}{60},\binom{65}{10}=\binom{65}{55},\binom{65}{30}=\binom{65}{35}$$
$$\binom{65}{13}=\binom{65}{52},\binom{65}{26}=\binom{65}{39},\binom{65}{15}=\binom{65}{50},\binom{65}{25}=\binom{65}{40}$$

olacaktır. Buna göre, istenilen toplam 16 katsayı 65 ile kalansız bölünemez.

Doğru cevap “C” seçeneği olacaktır.

$\boxed{\Sigma}$